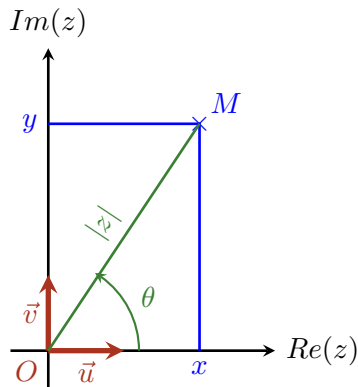


Complexes – Géométrie

Permettent de simplifier les calculs trigonométrique.

Affixe



Dans le plan complexe $(0; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point M d'affixe $z = x + iy$

- On définit le **module** $|z| = OM$,
- On définit l'**argument** $\arg(z) = \theta = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

La notation de z sous sa forme trigonométrique est

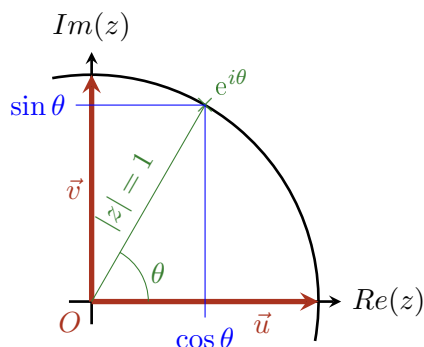
$$z = |z| \cdot e^{i\theta}$$

Par exemple $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ est le nombre z de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Calculer le module

En utilisant Pythagore, on voit que $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, donc $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Cercle trigonométrique



Le nombre $e^{i\theta}$ correspond au point du cercle trigonométrique à l'angle θ . On a donc :

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(e^{i\theta}) = \theta$$

Sur le graphique on peut voir aussi

$$x = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \sin \theta$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$$

trigonométrie $\rightarrow$ algébrique

On connaît $z = |z| e^{i\theta}$, on a directement : $z = |z| \cdot \cos(\theta) + i |z| \sin(\theta)$

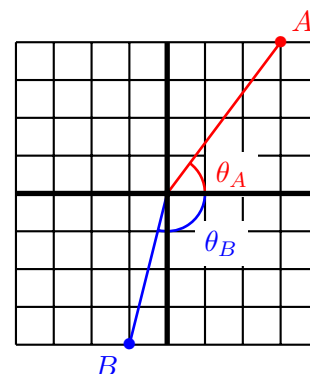
algébrique $\rightarrow$ trigonométrie

On connaît $z = x + iy$,

- on calcule $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- on sait que $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$ donc $\theta = \pm \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right)$,
- on décide du signe selon le signe de y .

Exemple, $z_A = 3 + 4i \Rightarrow |z_A| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
Puisque $y_A > 0$, on a $\theta_A = +\arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53^\circ$.

$z_B = -1 - 4i \Rightarrow |z_B| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ et comme $y_B < 0$,
 $\theta_B = -\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) \approx -104^\circ$.



Calcul argument avec arctan

Il est fréquent en physique de calculer θ en utilisant arctan plutôt que arccos. C'est en effet pratique puisque $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$.

On peut donc dire $\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

▲ quand $x \leq 0$ il faut adapter car arctan renvoie toujours un angle entre -90° et 90° .

Par exemple, ci-dessus, pour B , $\arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right) = \arctan(4) \approx 76^\circ$ au lieu de -104° .

Produit et quotient en forme trigonométrique

La forme trigonométrique est très efficace quand il faut faire des **produits** ou des **quotients**. C'est évident avec l'écriture utilisant exp :

$$z_1 = |z_1|e^{i\theta_1} \quad ; \quad z_2 = |z_2|e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad z_2 \cdot z_1 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i\theta_1 + i\theta_2}$$

Dans un produit les arguments s'ajoutent, comme des puissances et c'est pour cette raison que l'on note $e^{i\theta}$.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Même principe pour les quotients.

Intérêt de la forme trigonométrique en électricité

Prenons une équation différentielle banale en électricité

$$(\mathcal{E}) \quad \tau \cdot S'(t) + S(t) = E(t) \quad \text{avec} \quad E(t) = A \cos(\omega t)$$

On ne donne jamais dans ce cas là la condition initiale $S(0)$ car elle n'a aucun intérêt.

La résolution de l'équation différentielle nécessiterait de...

- Résoudre $(\mathcal{E}_0) \quad \tau \cdot S'(t) + S(t) = 0$. On obtient $S_0 = K e^{-t/\tau}$
- Trouver une solution S_1 *C'est la difficulté principale*
- Écrire que les solutions ont la forme $S = S_0 + S_1$
- Calculer la valeur de K en utilisant la condition initiale $S(0)$.

Mais quand on s'intéresse au régime permanent, c'est à dire quand le circuit a trouvé un équilibre au bout d'un certain temps, le terme $K e^{-t/\tau}$ est devenu ≈ 0 : c'est un terme de régime transitoire. Il ne nous intéresse pas.

Donc au bout d'un temps de quelques τ , on peut dire $S \approx S_1$ et donc la seule chose que l'on veut connaître est S_1 .

On sait $S_1 = B \cos(\omega t + \varphi)$ et il faut trouver la bonne expression pour B et pour φ . C'est là que l'on rencontre des difficultés : si on essaie cette expression dans $(\mathcal{E})$ on obtient :

$$-\tau S \omega \sin(\omega t + \varphi) + S \cos(\omega t + \varphi) = E \cos(\omega t)$$

C'est compliqué alors que l'équation est très simple...

Si on utilise les complexes, en écrivant $E(t) = A e^{j\omega t}$ et $S = B e^{j\omega t + j\varphi}$ on a :

$$j\tau B \omega e^{j\omega t + j\varphi} + B e^{j\omega t + j\varphi} = A e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{B}{A} e^{j\varphi} = H = \frac{1}{j\tau\omega + 1} \Rightarrow \text{Gain} = |H| \text{ et } \varphi = \arg(H)$$