

Exercice 1

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 5y' + y = 10 \quad \text{avec } y(0) = 0$$

- Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_0) : 5y' + y = 0$.
- Le membre de droite étant $f(t) = 10$, une constante, proposer une solution particulière à l'équation (E) .
- Déduire la forme générale des solutions de (E) .
- Déterminer la solution y de (E) vérifiant la condition initiale.

Exercice 2

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 5y' + y = 6e^{-t} \quad \text{avec } y(0) = 0$$

- Déterminer l'ensemble des solutions de $(E_0) : 5y' + y = 0$.
- Le membre de droite étant $f(t) = 6e^{-t}$, on essaie une solution de forme Ae^{-t} . En déduire une solution particulière de (E) .
- Déduire la forme générale des solutions de (E) .
- Déterminer la solution y de (E) vérifiant la condition initiale.

Exercice 3 Champ de vecteurs

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : \quad 2y' + y = 0,5 + 0,2t \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}(y - 0,5 - 0,2t)$$

Supposons que je cherche une certaine solution y qui vérifie $y(1) = 2$. Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_y$ passe par le point de coordonnées $(1; 2)$. Et comme y est solution de (E) on peut affirmer que $2y'(t) + y(t) = 0,5 + 0,2t$, ce qui doit être vrai en $t = 1$, donc :

$$2y'(1) + y(1) = 0,5 + 0,2 \Rightarrow y'(1) \approx -0,65$$

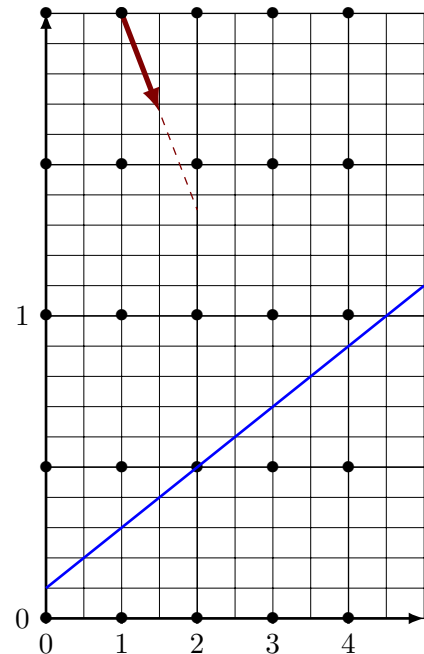
On en déduit que la tangente à $\mathcal{C}_y$ en $(1; 2)$ doit avoir la pente $-0,65$. *Ce résultat est rendu plus évident par la 2e forme de l'équation.*

On a représenté le point en $(1; 2)$ et une portion de tangente.

On a représenté la droite d'équation $y = 0,1 + 0,2t$ qui est une solution particulière de (E) .

Par le même raisonnement, placez le morceau de tangente pour tous les points mis en évidence sur le quadrillage.

La suite nécessite les explications du professeur...



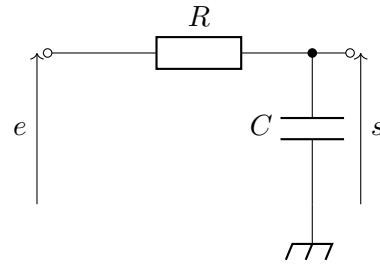
Exercice 4 Charge d'un condensateur

On considère le circuit ci-contre.

On pose $\tau = RC$.

La physique nous donne l'équation :

$$(\mathcal{E}) : e = s + \tau \cdot s'$$



On suppose que $s(0) = 0$ et pour $t \geq 0$, $e(t) = E$.

- 1) Résoudre en toute généralité l'équation différentielle en suivant la méthode du cours.
- 2) Soit $R = 2\text{ k}\Omega$, $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, $E = 5\text{ V}$.
 - a) Calculez τ .
 - b) Tracez la courbe de $s(t)$ dans un repère où l'unité horizontale est la ms .
 - c) Donnez $s_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$
 - d) Calculez $t_{95\%}$ pour lequel $s(t)$ atteint 95 % de s_∞ .

Exercice 5 Refroidissement

Le temps sera exprimé en secondes.

Un dispositif produit de la chaleur. La puissance calorifique produite en fonction du temps est $p(t)$, exprimé en Watts.

Soit $\theta(t)$ la température en $^{\circ}\text{C}$. On souhaite contrôler cette température grâce à un dispositif de refroidissement qui se met en route quand la température monte. La température cible est $\theta_{\text{cible}} = 10^{\circ}\text{C}$.

Le dispositif obéit à l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \theta'(t) = -B \cdot (\theta(t) - \theta_{\text{cible}}) + A \cdot p(t)$$

On prendra $B = 0,4$ et $A = 0,1$. L'unité sera à préciser.

Pour la sécurité du système,

- $\theta(t)$ ne devrait jamais dépasser 50°C ,
- $\theta(t)$ ne devrait pas dépasser 30°C plus longtemps qu'une minute.

On suppose que $p(t) = 200e^{-0,2t}$ et que $\theta(0) = 12^{\circ}\text{C}$.

- (1) Quelle doivent être les unités de A et B ?
- (2) Résoudre l'équation différentielle sans second membre :

$$\theta'(t) = -B \cdot \theta(t)$$

Remplacez les symboles connus par leur valeur.

- (3) On souhaite vérifier une solution possible de (E) .
 - (a) Soit $\theta_1(t) = 10 + 100e^{-0,2t}$. Calculez $\theta_1'(t)$.
 - (b) Vérifiez que θ_1 est bien une solution de (E) .
- (4) Donnez l'expression d'une solution générale de (E) .
- (5) Justifiez que l'unique a solution de (E) satisfaisante est :

$$\theta(t) = 10 + 100e^{-0,2t} - 98e^{-0,4t}$$

- (6) (a) Déterminez $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$.
 - (b) Peut-on dire que le système fait ce qui est attendu ? Justifiez.
- (7) Tracez la courbe sur votre calculatrice.
- (8) Y-a-t-il danger de détérioration du matériel ? Argumentez.