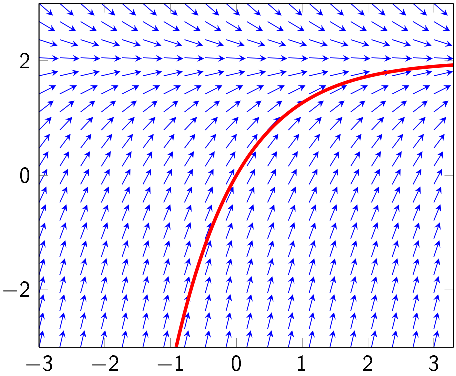

Équations différentielles – Résolution ordre 1

I. Présentation du problème

On souhaite résoudre une équation de la forme :

$$(E) : a \cdot y' + b \cdot y = f(t)$$

Et on connaît une condition initiale : $y(0) = \cdots$.

- y est une fonction de t et y' est sa dérivée.
- a et b sont des réels. $a \neq 0$.
- $f(t)$ est une fonction quelconque.

Le plus souvent, $f(t)$ est une simple constante mais en électricité, cela pourrait être $f(t) = A\,sin(\omega\, t)$...

Exemple

$$(E) : \theta' = -0,05(\theta - 10) \Leftrightarrow \theta' + 0,05\theta = 0,5$$

On reconnaît $a = 1$, $b = 0,05$ et $f(t) = 0,5$.
La condition initiale peut être $\theta(0) = 100$.

II. Méthode

II. 1) Ce que l'on ne veut pas faire

Il existe des méthodes toutes faites. Par exemple, si on sait que

$$a\,y' + b\,y = c \quad \text{et } y(0) = \cdots$$

avec a b et c des constantes, on sait tout de suite que la solution est :

$$y(t) = \left(y(0) - \frac{c}{b}\right) \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b}$$

Mais on ne veut pas procéder ainsi. On veut une méthode plus générale qui permette de s'adapter à des cas plus variés et qui permet de mieux comprendre les éléments qui reviennent toujours et ceux qui changent.

II. 2) La bonne méthode

On découpe le problème en 3 parties :

i) on considère juste le membre de gauche $a\,y' + b\,y$;

ii) on prend en compte le membre de droite $f(t)$;

iii) on prend en compte la condition initiale $y(0)$.

La première et la 3e partie sont simple et toujours identiques : les valeurs de a, b et $y(0)$ peuvent varier, cela ne change pas grand chose.
Seule la 2e partie change selon la fonction $f(t)$. C'est simple si $f(t) = c$.
C'est plus compliqué si $f(t) = A\sin(\omega t)$.

II. 3) Membre de gauche

Pour prendre en compte le membre de gauche, on commence par résoudre l'**équation sans second membre**.

$$(E_0) : a \cdot y' + b \cdot y = 0$$

On peut reformuler (c'est plus simple à comprendre) l'équation sous la forme :

$$(E_0) : y' = -\frac{b}{a} y$$

Vous pouvez essayer toute sorte de fonction : $\cos(t)$, $\ln(t)$, t, t^2, ...
Aucune n'a cette propriété. La seule qui convienne est **exponentielle**.
Solution de (E_0) :

$$y_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{a} t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

On note y_0, l'indice est une simple étiquette qui servira plus tard.

Commentaires

$$(E_0) : a \cdot y' + b \cdot y = 0 \Rightarrow y_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

- Si on écrit $y' + 5y = 40$, l'équation sans second membre est $y' + 5y = 0$
- Si on écrit $y' = 40 - 5y$, l'équation sans second membre est $y' = -5y$

On n'enlève que les termes sans y et sans y'.

Commentaires

$$(E_0) : a \cdot y' + b \cdot y = 0 \Rightarrow y_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

- Si on écrit $y' + 5y = 40$, l'équation sans second membre est $y' + 5y = 0$
- Si on écrit $y' = 40 - 5y$, l'équation sans second membre est $y' = -5y$

On n'enlève que les termes sans y et sans y'.

Quand on écrit $K \in \mathbb{R}$ on veut dire que n'importe quelle valeur constante fait l'affaire.

Exemple : $(E_0) : 5y' + 10y = 0 \Rightarrow y_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-2t}, \quad K \in \mathbb{R}$

- $y(t) = 325\mathrm{e}^{-2t}$ est une solution possible. En effet :

$$5y' + 10y = 5 \times (-2)325\mathrm{e}^{-2t} + 10 \times 325\mathrm{e}^{-2t} = 0$$

- Si on remplace 325 par n'importe quel nombre, on voit que l'égalité reste valide.

Exemple

Exemple

$$(E) : \theta' = -0,05(\theta - 10) \Leftrightarrow \theta' + 0,05\theta = 0,5$$

Dans ce cas l'équation sans second membre est :

$$\theta' = -0,05\theta$$

On en déduit :

$$\theta_0 = K\mathrm{e}^{-0,05t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

II. 4) Membre de droite

On cherche une **solution particulière**.

Si on considère l'équation $x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 7x - 9 = 0$. C'est une équation compliquée qui a peut être plusieurs solution. On n'est pas sûr de pouvoir les trouver. Par contre, on peut facilement vérifier que $x = 1$ est une solution.

De la même façon, notre équation, **sans tenir compte de la condition initiale**, a une infinité de solutions. On cherche à en trouver une. On doit **deviner** une solution. Cela peut-être difficile, voire impossible. Cela dépend du membre de droite $f(t)$.

Dans les cas qui nous intéresse, on a toujours les mêmes formes de $f(t)$ de sorte qu'on sait quoi chercher.

- Si $f(t) = c$, constante, on cherche $y(t) = C^{te}$.
- Si $f(t) = A\sin(\omega t)$, on cherche $y(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$.
- Si $f(t) = A\cos(\omega t)$, on cherche $y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$.
- Si $f(t) = A\,\mathrm{e}^{a\,t}$, on cherche $y(t) = B\,\mathrm{e}^{a\,t}$.

Ces trois cas devraient suffire.

On notera y_1 la solution trouvée.

L'indice est encore une étiquette qui sert plus tard.

Exemple

Exemple

$$(E) : \theta' = -0,05(\theta - 10) \Leftrightarrow \theta' + 0,05\theta = 0,5$$

Dans ce cas, $f(t) = 0,5$.

Le second membre étant constant, on va chercher une solution de forme $\theta = C^{te}$.

- On a donc $\theta' = 0$,
- en remplaçant dans l'équation, on obtient :

$$0 + 0,05C^{te} = 0,5 \Rightarrow C^{te} = \frac{0,5}{0,05} = 10$$

Conclusion : $\theta_1 = 10$.

Pour l'instant, nous n'avons tenu compte **que** de l'équation (E), membre gauche et membre droit.

Nous n'avons pas encore pris en compte la condition initiale $y(0)$.

La **solution générale** de (E) est de la forme :

$$y = y_0 + y_1$$

Cela veut dire que toute solution de (E) s'écrira sous la forme $y_0 + y_1$

Exemple

Exemple

$$(E) : \theta' = -0,05(\theta - 10)$$

On a trouvé :

- $\theta_0 = K\mathrm{e}^{-0,05t}, \quad K \in \mathbb{R}$
- $\theta_1 = 10.$

Les solutions de (E) s'écrivent donc :

$$\theta = 10 + K\mathrm{e}^{-0,05t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Comprenez bien : Vous pouvez choisir n'importe quel K, ce sera une solution. Et vous ne pourrez trouver aucune solution ayant une forme différente.

II. 6) Condition initiale

Il y a une **infinité** de solution à l'équation : chaque valeur de K donne une solution.

À présent on cherche l'**unique** solution qui respecte la **condition initiale**. Cela revient à trouver la seule valeur de K qui convient.

Exemple

Exemple

$$(E) : \theta' = -0,05(\theta - 10), \quad \text{et } \theta(0) = 100$$

On sait que $\theta(t) = 10 + K\,\mathrm{e}^{-0,05t}$. Donc en 0 :

$$\theta(0) = 10 + K\mathrm{e}^{0} = 10 + K$$

Par ailleurs, la condition initiale nous dit que $\theta(0) = 100$. Donc :

$$10 + K = 100 \Rightarrow K = 90$$

On en déduit que la solution du problème (tenant compte de (E) **et** de la condition initiale $\theta(0) = 100$) est :

$$\theta(t) = 10 + 90\mathrm{e}^{-0,05t}$$

II. 7) Résumons

On veut résoudre une équation pouvant se mettre sous la forme

$$ay' + by = f(t), \quad \text{avec } y(0) = \cdots$$

La solution s'écrit toujours :

$$y(t) = \mathsf{K}e^{-\frac{b}{a}t} + y_1(t)$$

- $\mathsf{K}e^{-\frac{b}{a}t}$ est la solution de l'équation sans second membre $ay' + by = 0$;
- La valeur de K est déterminée à la fin en tenant compte de la **condition initiale** $y(0)$;
- $y_1(t)$ est une **solution particulière** de l'équation. Cette solution dépend surtout de $f(t)$. On devine y_1 avec de l'intuition et en ayant l'habitude de ce genre d'équation :
  - Si $f(t) = c$, constante, on cherche $y_1(t) = C^{te}$.
  - Si $f(t) = A\sin(\omega t)$, on cherche $y_1(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$.
  - Si $f(t) = A\cos(\omega t)$, on cherche $y_1(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$.
  - ...