

Exponentielle

Définition

La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ comme la fonction réciproque de ln, c'est à dire :

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$$

avec $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]0; +\infty[$.

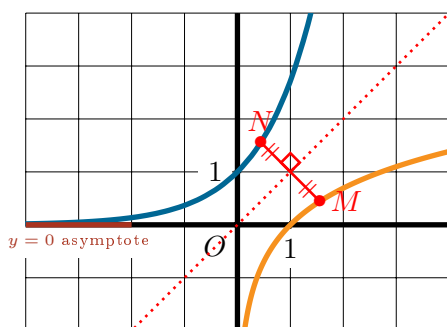
Par exemple $\ln(1) = 0 \Leftrightarrow 1 = \exp(0)$ ou encore $\ln(e) = 1 \Leftrightarrow e = \exp(1)$.

On a aussi :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ln(\exp(y)) = y$$

Courbe et variations

La courbe de exp est donc symétrique de la courbe de ln



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp		0	1	$+\infty$

Asymptote $y = 0$.

On remarque en particulier que $\exp > 0$

Dérivée

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{en général : } [\exp(u)]' = u' \cdot \exp(u)$$

On peut d'ailleurs définir exp comme l'unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation $f' = f$ avec $f(0) = 1$.

Généralisation de la puissance

$$\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

Ce qui correspond exactement à la formule de puissance $A^{a+b} = A^a \cdot A^b$. On choisit donc la notation :

$$\exp(x) = e^x$$

où e est le nombre tel que $\ln(e) = 1$ ou encore $\exp(1) = e$.

$e \approx 2,718$ est le nombre d'Euler.

Cette notation permet de généraliser la notion de puissance à des exposants réels. Ainsi on définit :

$$a > 0, x \in \mathbb{R}, \quad a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \exp(-x) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0$$

En gros, quand $\exp(x)$ et x^n sont en conflit, c'est exp qui l'emporte.