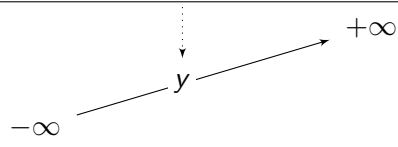


$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

Fonction exponentielle

I. Définition

Inverse de $\ln$

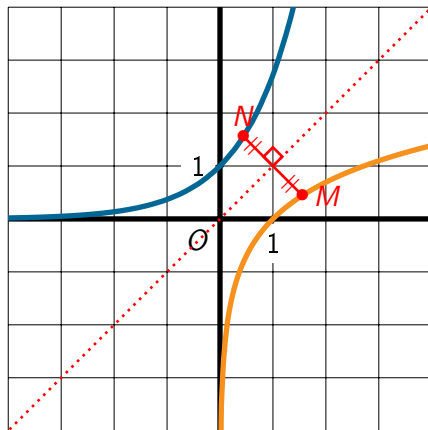
x	0	x	$+\infty$
$\ln$			$+\infty$

À chaque x de $]0 ; +\infty[$, il correspond exactement un y de $] - \infty ; +\infty[$ et **réciroquement**.

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$$

Courbe

On passe de $\ln$ en intervertissant x et y donc la courbe de $\exp$ est la symétrique de $\ln$.
Asymptote $y = 0$.



Quelques valeurs

Toujours en exploitant $\ln(x) = y \Leftrightarrow x = \exp(y)$:

$$\ln(1) = 0 \Leftrightarrow \exp(0) = 1$$

$$\ln(e) = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = e$$

$$\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} = -\infty \Leftrightarrow \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} = 0$$

$$\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = +\infty \Leftrightarrow \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$

En général $x = \exp(y) \Rightarrow \ln(x) = \ln(\exp(y)) \Rightarrow y = \ln(\exp(y))$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$.

Tableau de variations

$$a < b \Leftrightarrow \ln(\exp(a)) < \ln(\exp(b)) \Leftrightarrow \exp(a) < \exp(b)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp		0	1	e

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Soit $f(x) = \ln(\exp(x))$. On sait que $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$.

On sait aussi que $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$ donc $f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)}$.

On en déduit :

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

plus généralement

$$[\exp(u)]' = u' \cdot \exp(u)$$

$\exp$ l'emporte sur x^n .

Exemple : $f(x) = (2x^2 + 7) \exp(x)$.

$\exp$ l'emporte sur x^n .

Exemple : $f(x) = (2x^2 + 7) \exp(x)$.

- En $+\infty$, $2x^2 + 7 \rightarrow +\infty$ et $\exp(x) \rightarrow +\infty$.
Pas de problème, $f(x) \rightarrow +\infty$.
- En $-\infty$, $2x^2 + 7 \rightarrow +\infty$ et $\exp(x) \rightarrow 0$.
Indéterminé.
 $\exp$ l'emporte donc $f(x) \rightarrow 0$.

$$\text{II. } e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$, d'une part :

$$\ln(\exp(a + b)) = a + b$$

et d'autre part :

$$\ln(\exp(a) \cdot \exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a + b$$

donc :

$$\ln(\exp(a + b)) = \ln(\exp(a) \cdot \exp(b))$$

et donc :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$$

Notation en exposant

La formule $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ correspond exactement à la formule pour les puissances $A^{a+b} = A^a \cdot A^b$. Et puisque $\exp(1) = e$, on adopte la notation :

$$\exp(x) = e^x$$

Ainsi la formule $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ semble aller de soi.

Cette notation permet de généraliser la notion de puissance à des exposants réels : 17^π devient possible !

On définit, pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

- C'est cohérent avec les puissances ordinaires, c'est à dire si n entier,

$$a^n = e^{n \cdot \ln(a)} = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

- Cela généralise naturellement la puissance aux exposants réels.

Par exemple $2^\pi = e^{\pi \cdot \ln(2)} \approx 8,82$ ce qui est bien un peu au-dessus de $2^3 = 8$.