Suites numériques

- (u_n) désigne une suite. On peut préciser, par exemple, $(u_n)_{n\geq 1}$ pour indiquer que n commence à 1.
  On peut aussi écrire comme avec une fonction $u(5) = 23$.
- u_n représente le terme de la suite de rang n.
  Exemple : $u_5 = 23$ se lit « le terme de rang 5 est 23.

Variations

- $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n, \Leftrightarrow u_n$ croissante.
- $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n, \Leftrightarrow u_n$ décroissante.

Exemple : $u_n = n^2$. Alors $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0$ donc u_n croissante.

Explicite / Récurrence

- **Explicite :** On connaît la formule pour calculer u_n **directement** :
  $u : n \mapsto f(n)$ ou encore $u(n) = f(n)$ **Exemple :** $u_n = 3n + 2$
- **Récurence :** Un terme est calculé à partir de **ceux qui le précèdent**.
  Exemple : $u_n = 3u_n + 2$ en commençant par $u_0 = 1$

$$u_0 = 1 \xrightarrow{\bullet\times 3+2} u_1 = 5 \xrightarrow{\bullet\times 3+2} u_2 = 17 \xrightarrow{\bullet\times 3+2} u_3 = 53 \xrightarrow{\bullet\times 3+2} u_4 = 161$$

Suite arithmétique

$$u_{n+1} = u_n + r \Rightarrow \quad u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \cdots$$

r est la **raison**.

$$u_n = u_0 + r \cdot n$$

Exemple : $u_0 = 3$ et $r = 5$, $\quad 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+5} 18 \xrightarrow{+5} \cdots$

Suite géométrique

$$u_{n+1} = q \times u_n \Rightarrow \quad u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} \cdots$$

q est la **raison**.

$$u_n = u_0 q^n$$

Exemple : $u_0 = 10$ et $r = 0,9$, $\quad 10 \xrightarrow{\times 0,9} 9 \xrightarrow{\times 0,9} 8,1 \xrightarrow{\times 0,9} 7,29 \xrightarrow{\times 0,9} \cdots$
Convergence : Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Sinon (u_n) diverge.

Recherche de seuil

Par exemple : En 2015, la production de déchets d'une ville était de 28 tonnes. On estime que cette production augmente de 1,8 % par an. En quelle année la production de déchets dépassera-t-elle 50 tonnes ?

Suite géométrique : $q = 1 + 1,8\,\% = 1,018$, $u_0 = 28$ pour 2015.

$u_n = 28 \times (1,018)^n$ l'année $2015 + n$.

$$\begin{aligned} u_n = 28 \times (1,018)^n \geq 50 &\Leftrightarrow (1,018)^n \geq \frac{50}{28} \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln(1,018) \geq \ln\left(\frac{50}{28}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\ln(1,018)} \cdot \ln\left(\frac{50}{28}\right) \approx 32,5 \end{aligned}$$

C'est donc en $2015 + 33 = 2048$ que la production devrait dépasser les 50 tonnes.