$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots$$

Suite numériques

I. Définition

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5\ ;\ 12\ ;\ 20\ ;\ 29\ ;\ 39\ ;\ 50\ ;\ 62\ ;\ 75\ ;\ 89\ ;\ 104\ ;\ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5 \ ; \ 12 \ ; \ 20 \ ; \ 29 \ ; \ 39 \ ; \ 50 \ ; \ 62 \ ; \ 75 \ ; \ 89 \ ; \ 104 \ ; \ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

Attention : L'ordre est important et il faut connaître **le rang du premier élément**.

Si le premier a le rang 1 :

$$u_1 = 5$$

1. Le terme de rang 2 est :
2. $u_5 =$
3. 104 est le terme de rang

Si le premier a le rang 0 :

$$u_0 = 5$$

1. Le terme de rang 2 est :
2. $u_5 =$
3. 104 est le terme de rang

I. 1) Vocabulaire

On considère la succession de nombres suivantes :

$$5\ ;\ 12\ ;\ 20\ ;\ 29\ ;\ 39\ ;\ 50\ ;\ 62\ ;\ 75\ ;\ 89\ ;\ 104\ ;\ \cdots$$

Cette succession de nombres est appelé une **suite**. On lui **donne un nom**, par exemple : u.

Attention : L'ordre est important et il faut connaître **le rang du premier élément**.

Si le premier a le rang 1 :

$$u_1 = 5$$

1. Le terme de rang 2 est :
2. $u_5 = 39$
3. 104 est le terme de rang 10

Si le premier a le rang 0 :

$$u_0 = 5$$

1. Le terme de rang 2 est : 12
2. $u_5 = 50$
3. 104 est le terme de rang 9

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux : $f : x \mapsto y$.

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux : $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore : $u : n \mapsto y$.

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux : $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore : $u : n \mapsto y$.
- On notera $u_n = y$.

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux : $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore : $u : n \mapsto y$.
- On notera $u_n = y$.

Important

- Quand on veut parler de la suite dans son ensemble, on note (u_n)

I. 2) Notation

Une suite est une sorte de fonction

- **Fonction** : On prend $x \in \mathbb{R}$ et on lui associe un nombre y.
  On note $f(x) = y$ ou mieux : $f : x \mapsto y$.
- **Suite** : On prend $n \in \mathbb{N}$ et on lui associe un nombre y.
  On pourrait noter $u(n) = y$ ou encore : $u : n \mapsto y$.
- On notera $u_n = y$.

Important

- Quand on veut parler de la suite dans son ensemble, on note (u_n)
- On peut préciser les valeurs de n possibles. Par exemple $(u_n)_{n>0}$ veut dire que le premier terme de la suite est u_1.

II. Variations d'une suite

- Quand pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} > u_n$, la suite est **croissante**
- Quand pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} < u_n$, la suite est **décroissante**

III. Expression d'une suite

III. 1) Suite donnée par une relation explicite

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_n = 3n + 2$.

- On peut directement calculer n'importe quel terme de la suite.

$$u_{100} = 3 \times 100 + 2 = 302$$

III. 1) Suite donnée par une relation explicite

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = 3n+2$.

- On peut directement calculer n'importe quel terme de la suite.

$$u_{100} = 3\times 100 + 2 = 302$$

- On peut faire un tableau de valeur :

n	0	1	2	3	4
u_n	2	5	8	11	14

III. 1) Suite donnée par une relation explicite

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_n = 3n + 2$.

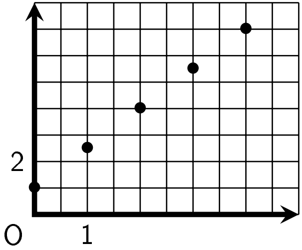
- On peut directement calculer n'importe quel terme de la suite.

$$u_{100} = 3 \times 100 + 2 = 302$$

- On peut faire un tableau de valeur :

n	0	1	2	3	4
u_n	2	5	8	11	14

- On peut faire un graphique :
  Il ne faut pas relier les points !



Définition

- On dit que (u_n) est définie **explicitement** quand on a une relation de la forme :
$$u_n = f(n)$$
- Dans ce cas, étudier (u_n) revient à étudier f (signe, variations...)

Définition

- On dit que (u_n) est définie **explicitement** quand on a une relation de la forme :
$$u_n = f(n)$$
- Dans ce cas, étudier (u_n) revient à étudier f (signe, variations...)

Exemple

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = 3n + 2$.

- Cela revient à $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x + 2$.
- On reconnaît une fonction affine, croissante, on peut donc dire que (u_n) est croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 1

Calculez u_0, u_1 et u_{10} en arrondissant à $0,01$ près.

(a) $u_n = 2 - 3n$

(b) $u_n = (1,02)^n$

(c) $u_n = (0,2)^n$

(d) $u_n = -\frac{1}{n+1}$

Lesquelles de ces suites sont croissantes ? décroissantes ?

Exemple

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

III. 2) Suite donnée par une relation de récurrence

Exemple

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

Attention

Notation est très importante.

Il faut écrire en **indice**.

Au pire, on peut utiliser une notation de fonction :

$$u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u(n+1) = 3u(n) + 1, n \geqslant 0$$

Attention à ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

(1) Déjà, on sait que $u_0 = 1$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

(1) Déjà, on sait que $u_0 = 1$

(2) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:

$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

(1) Déjà, on sait que $u_0 = 1$

(2) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:

$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

(3) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 1$:

$$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

(1) Déjà, on sait que $u_0 = 1$

(2) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:

$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

(3) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 1$:

$$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$

(4) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 2$:

$$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$$

Comment fait-on le calcul ?

On a : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ avec $n \geqslant 0$

(1) Déjà, on sait que $u_0 = 1$

(2) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 0$:

$$u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$$

(3) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 1$:

$$u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$$

(4) On récrit la règle de récurrence en prenant $n = 2$:

$$u_3 = 3u_2 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$$

$$1 \overset{(\bullet)\times 3+1}{\longrightarrow} 4 \overset{(\bullet)\times 3+1}{\longrightarrow} 13 \overset{(\bullet)\times 3+1}{\longrightarrow} 40$$

Problème

Comment calculer u_{100} de cette façon ?

(1) On prend le temps de tout calculer :
$u_0 \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{99} \to u_{100}$. C'est long.

(2) On programme une machine

(3) On trouve une formule qui donne directement u_n. Ici :

$$u_n = 1,5 \times 3^n - 0,5$$

Mais ce n'est pas toujours possible.

Exercice 2

Calculez u_1 et u_2 :

(1) $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 7$

(2) $u_0 = 1$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{2} u_n$

(3) $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$

Exercice 3 : Définition par récurrence/explicite

Dites si les suites suivantes sont donnée par une relation de récurrence ou une relation explicite :

(1) $u_n = 17\cos(n\pi)$

(2) $u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{u_n}{2}$

IV. Suites arithmétique

Définition

(u_n) est une suite arithmétique si pour tout n :

$$u_{n+1} = u_n + r, r \in \mathbb{R}$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite

Exemple

$u_0 = 2$; $u_1 = 5$; $u_2 = 8$; $\cdots$ est une suite **arithmétique** de raison 3.

Exercice 4

$u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n + 11$

(a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

(b) Calculer u_{10} et u_{20}.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a alors, si u_0 est défini :

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

Exemple :

Si $u_0 = 7$ et $r = 11$ alors $u_n = 7 + 11n$.

On peut alors calculer directement $u_{10} = 7 + 11 \times 10 = 117$.

V. Suite géométrique

V. 1) Définition

On appelle **suite géométrique** une suite (u_n) telle que :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la **raison** de la suite.

V. 1) Définition

On appelle **suite géométrique** une suite (u_n) telle que :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est la **raison** de la suite.

Exemple

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 1$. On a alors :

$u_1 = 3 \times u_0 = 3$

$u_2 = 3 \times u_1 = 9$

$u_3 = 3 \times u_2 = 27$

$u_4 = 3 \times u_3 = 81$

$$1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{\times 3} 9 \xrightarrow{\times 3} 27 \xrightarrow{\times 3} 81 \xrightarrow{\times 3} \cdots$$

On peut ainsi calculer n'importe quel terme de la suite.

Exercice 5

$u_0 = 20$, et

$$\text{pour } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 0,8\, u_n$$

(1) Calculez u_1, u_2, u_3, u_4 à $0,001$ près

(2) Calculez u_{10} à $0,001$ près

V. 2) Terme général

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison q ;

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple

Avec la suite de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $q = 0,9$,

$$u_{10} = u_0 \cdot q^{10} = 50 \times (0,9)^{10} \approx 17,434$$

Exercice 6

$u_0 = 1000$ et $q = 1,02$
Donnez u_{10} et u_{20} à $0,001$ près.

V. 3) Variations en %

Exemple : Je place 1000 € sur un compte en 2005. C'est l'année 0. Chaque année, la somme augmente de 2 %. Combien aurais-je en 2030 ?

Soit C_n la somme sur le compte l'année n.

- $C_0 =$
- $C_{n+1} =$
- En 2030...

V. 3) Variations en %

Exemple : Je place 1000 € sur un compte en 2005. C'est l'année 0. Chaque année, la somme augmente de 2 %. Combien aurais-je en 2030 ?

Soit C_n la somme sur le compte l'année n.

- $C_0 = 1000$
- $C_{n+1} = C_n + 2\,\% \cdot C_n = 1,02 \cdot C_n$
- En 2030... $C_{25} = 1000 \cdot (1,02)^{25} \approx 1640,31$ €

V. 4) Limite d'une suite géométrique

Soit (un) une suite géométrique de raison q :

- si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} = 0$,
- si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} = \pm\infty$, selon le signe de u_0

Cas moins intéressants :

- si $q = 1$, la suite est constante,
- si $q < 1$, la suite diverge en alternant de signe.

V. 5) Recherche de seuil

Par exemple : En 2015, la production de déchets d'une ville était de 28 tonnes. On estime que cette production augmente de 1,8 % par an. En quelle année la production de déchets dépassera-t-elle 50 tonnes ?

Par exemple : En 2015, la production de déchets d'une ville était de 28 tonnes. On estime que cette production augmente de 1,8 % par an. En quelle année la production de déchets dépassera-t-elle 50 tonnes ?

On reconnaît une suite géométrique de raison $q = 1 + 1,8\,\% = 1,018$ et de premier terme $u_0 = 28$ correspondant à l'année 2015.

$u_n = 28 \times (1,018)^n$ l'année $2015 + n$.

$$\begin{aligned} u_n = 28 \times (1,018)^n \geq 50 &\Leftrightarrow (1,018)^n \geq \frac{50}{28} \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln(1,018) \geq \ln\left(\frac{50}{28}\right) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\ln(1,018)} \cdot \ln\left(\frac{50}{28}\right) \approx 32,5 \end{aligned}$$

C'est donc en $2015 + 33 = 2048$ que la production devrait dépasser les 50 tonnes.

Exercice 7 : seuil

Lorsqu'un rayon traverse une certaine plaque de verre, elle perd $\frac{1}{12^e}$ de son intensité lumineuse.

Combien le rayon doit-il traverser de plaques pour perdre la moitié de son intensité ?