



Ensembles de nombres



Quand vous verrez ce pictogramme, cela voudra dire qu'il ne faut pas recopier dans votre cours.

Je fais parfois des commentaires qu'il n'est pas nécessaire de connaître.

Vous pourrez toujours les retrouver dans les cours disponibles sur internet.

I. $\mathbb{N}$: les entiers naturels

Les entiers positifs :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

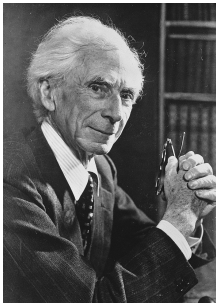
L'**arithmétique** est ma branche des mathématiques qui étudie $\mathbb{N}$ et notamment tout ce qui concerne les diviseurs, les nombres premiers...



Ça a l'air simple, et pourtant...



Un peu d'histoire



Au tournant du XX^e siècle, c'est la crise des mathématiques. On se met à construire des objets mathématiques plus compliqués et on réalise que des contradictions sont possibles.

Par exemple : le **paradoxe du Barbier**, de Bertrand Russel (à gauche)

« Dans une ville, un édit indique qu'un barbier doit raser les hommes qui ne rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là. » Mais alors qui rase le barbier ?



Histoire toujours...



David Hilbert propose de refonder les mathématiques sur des bases plus solides.

Il s'agirait de poser des axiomes et de construire toute la théorie logiquement à partir de ces axiomes, comme Euclide avec les *Éléments*, vers -300 .

Un **axiome** est une vérité première, posée sans démonstration. Un axiome est vrai par définition. À partir des axiomes, on raisonne logiquement pour obtenir d'autres vérités : les **théorèmes**.

 Les physiciens parlent de **postulat**, c'est légèrement différent car le postulat doit être vérifié par la réalité observée. Le mathématicien n'a pas cette contrainte. Il doit juste veiller à ne pas poser des axiomes qui ne se contredisent pas.



L'arithmétique de Peano

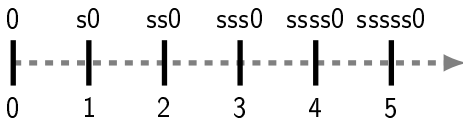


Fin XIXe siècle, Giuseppe Peano propose un ensemble d'axiomes pour construire $\mathbb{N}$, toujours valables aujourd'hui.



Aperçu (incomplet) des axiomes de Peano

- (A1) $\mathbb{N}$ contient le nombre 0
- (A2) Chaque élément $a \in \mathbb{N}$ a un successeur unique, nota sa .
- (A3) Chaque élément $a \in \mathbb{N}$, sauf 0, a un unique prédécesseur.



- (A4) Pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a + 0 = a$
- (A5) Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, $a + sb = s(a + b)$

On peut utiliser ces axiomes pour prouver que $2 + 2 = 4$

II. $\mathbb{Z}$: les entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\} \quad ; \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

 Parfois, pour justifier la nécessité de nombres négatifs, on dit que l'on a besoin de ces nombres pour résoudre des équations comme $x + 5 = 3$.

 En gros, $\mathbb{Z}$ c'est $\mathbb{N}$ auquel on ajoute tous les nombres en $-n$.



$\mathbb{Z}$ ne va pas de soi

Les nombres négatifs ne vont pas de soi. La première mention date d'environ 500 en Inde. On retrouve vers l'an 1000 dans le monde Arabe. Il faut attendre la Renaissance pour qu'ils arrivent en Europe. Ils sont généralement introduits pour parler de dettes.

C'est **Richard Dedekind** (1831 – 1916) qui formalise la construction de cette ensemble, et pour cette raison des mathématiciens ultérieurs introduisent la notation $\mathbb{Z}$, pour *Zahlen* = *nombres* en allemand.



III. $\mathbb{D}$: les décimaux

Ensemble des nombres, positifs ou négatifs, dont l'écriture décimale est finie.

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad ; \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

Exemple : $45,28639 = \frac{4\,528\,639}{100\,000} = \frac{4\,528\,639}{10^5}$

Ensemble des nombres, positifs ou négatifs, dont l'écriture décimale est finie.

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad ; \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

Exemple : $45,28639 = \frac{4\,528\,639}{100\,000} = \frac{4\,528\,639}{10^5}$

Remarque : Comme $10^0 = 1$, les nombres entiers sont décimaux.

 $\mathbb{D}$ n'est pas aussi fondamental que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ car $\mathbb{D}$ dépend de notre façon d'écrire les nombres. Pour un ordinateur qui compte en binaire, $\mathbb{D}$ n'a aucun intérêt particulier. D'ailleurs $0.1+0.1+0.1$ produit un résultat surprenant en Python...

IV. $\mathbb{Q}$: les rationnels

Ensemble des nombres pouvant s'écrire comme une fraction entière :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

p est le **numérateur** ; q est le **dénominateur** : q donne le **nom** de la fraction.

Rappel : $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}$ auquel on enlève 0.

Ensemble des nombres pouvant s'écrire comme une fraction entière :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

p est le **numérateur** ; q est le **dénominateur** : q donne le **nom** de la fraction.

Rappel : $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}$ auquel on enlève 0.



$\mathbb{Q}$ contient évidemment $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$.



Les nombres de $\mathbb{Q}$ permettent de résoudre des équations comme $3x = 4$.



En gros, $\mathbb{Q}$, c'est $\mathbb{Z}$ auquel on ajoute les nombres en $\frac{1}{n}$ avec tous leurs multiples.

Démontrer que : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

démonstration

On raisonne par l'**absurde** en supposant que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

Démontrer que : $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

démonstration

On raisonne par l'**absurde** en supposant que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

On peut trouver $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow 3 \cdot a = 10^n$$

Ce qui revient à dire que 10^n peut être un multiple de 3. C'est faux.
L'hypothèse $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ est donc fausse.



On se contente de cela. Pour aller plus loin, on dirait que 3 est qu'il n'est pas dans la décomposition en facteurs premier de $10^n = 2^n \cdot 5^n$.

 On fera attention à ne pas confondre un nombre et son approximation :

$$\frac{1}{3} \neq 0,3333333333$$

L'écriture décimale de $\frac{1}{3}$ est infinie, c'est justement pour cela que

$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

On peut seulement dire :

$$\frac{1}{3} \approx 0,3333333333$$

Les machines d'aujourd'hui savent donner des résultats exacts comme $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{1}{3}$, cependant, le plus souvent, elles donnent de très bonnes approximations comme 0,7853981634 ou 0,3333333333.

V. $\mathbb{R}$: les réels

Idée intuitive : On passe de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ en « bouchant les trous. »

En effet, l'écriture décimale d'un nombre de $\mathbb{Q}$ est toujours périodique.

Idée intuitive : On passe de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ en « bouchant les trous. »

En effet, l'écriture décimale d'un nombre de $\mathbb{Q}$ est toujours périodique.

Exemples :

- $\frac{4}{5} = 0,8000000000 \dots$
- $\frac{1472}{700} = 2,10 \underbrace{285714}_{\text{période}} \dots$

On peut produire des nombres comme $0,123456789101112 \dots$ non périodiques, donc $\notin \mathbb{Q}$. On sait par exemple que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$.

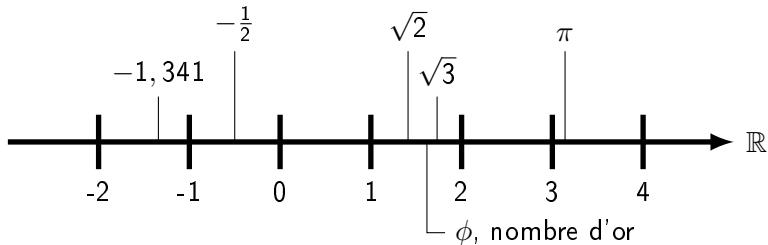


Nous prouverons ces affirmations plus tard (sauf $\pi \notin \mathbb{Q}$).

On peut représenter $\mathbb{R}$ par la **droite des réels**.

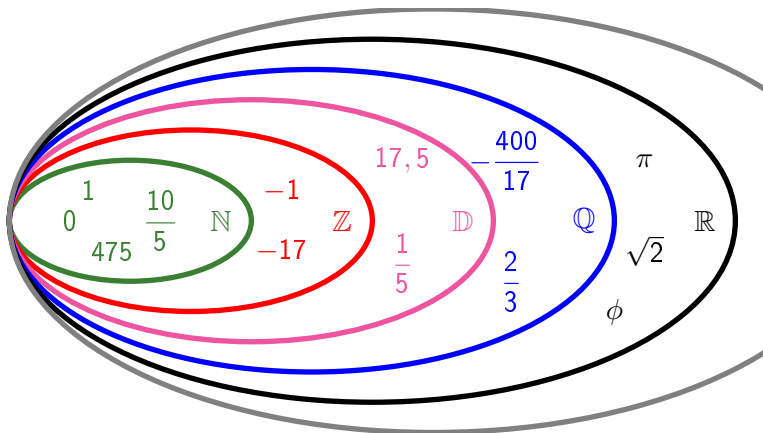
La droite exprime l'idée de continuité, sans trous, de $\mathbb{R}$.

Les points de la droite représentent les réels.





Récapitulatif

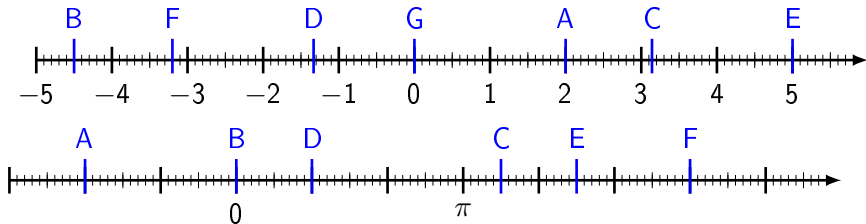


$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \dots$$

Exercice 1 Voir feuille d'exercices

Idem 36 – 38 p22

Exercice 2 Lire les valeurs sur l'axe de réels



Idem 47 – 52 p22

Exercice 3

- Réduire les fractions si possible ;
- les écrire sous la forme $a + \frac{b}{c}$ avec $0 \leq b < c$;
- dire lesquelles sont dans $\mathbb{D}$ et pour les autres, mettre en évidence la période de leur écriture décimale.

a) $\frac{73}{9}$

c) $\frac{63}{18}$

e) $\frac{100}{7}$

g) $\frac{980}{105}$

b) $\frac{12}{50}$

d) $\frac{221}{100}$

f) $\frac{345}{69}$

h) $\frac{5000}{37}$

Idem 40 ; 82 ; 86 – 88

Montrer que : Tout nombre dont l'écriture décimale est périodique est un nombre de $\mathbb{Q}$.

démonstration

Considérons un nombre x
qui s'écrit :

$$x = \underbrace{???? \dots ???}_{\text{partie entière}}, \overbrace{?? \dots ??}^{k \text{ chiffres}} \underbrace{??? \dots ???}_{p \text{ chiffres}} \dots$$

Les p chiffres constituent la partie **périodique** (qui se répète).

Montrer que : Tout nombre dont l'écriture décimale est périodique est un nombre de $\mathbb{Q}$.

démonstration

Considérons un nombre x
qui s'écrit :

$$x = \underbrace{???? \dots ???}_{\text{partie entière}}, \overbrace{?? \dots ??}^{k \text{ chiffres}} \underbrace{??? \dots ???}_{p \text{ chiffres}} \dots$$

Les p chiffres constituent la partie **périodique** (qui se répète).

$$10^k \cdot x = \underbrace{\dots}_{\text{partie entière}}, \underbrace{\dots}_{\text{partie décimale non périodique}} \underbrace{\dots}_{\text{partie décimale périodique}} \dots \quad \text{et} \quad 10^{k+p} \cdot x = \underbrace{\dots}_{\text{partie entière}}, \underbrace{\dots}_{\text{partie décimale non périodique}} \underbrace{\dots}_{\text{partie décimale périodique}} \dots$$

Montrer que : Tout nombre dont l'écriture décimale est périodique est un nombre de $\mathbb{Q}$.

démonstration

Considérons un nombre x
qui s'écrit :

$$x = \underbrace{???? \dots ???}_{\text{partie entière}}, \overbrace{?? \dots ??}^{k \text{ chiffres}} \underbrace{??? \dots ???}_{p \text{ chiffres}} \dots$$

Les p chiffres constituent la partie **périodique** (qui se répète).

$$10^k \cdot x = \underbrace{\dots}_{\text{bleu}} \underbrace{\dots}_{\text{rouge}}, \underbrace{\dots \dots}_{\text{vert}} \dots \quad \text{et} \quad 10^{k+p} \cdot x = \underbrace{\dots}_{\text{bleu}} \underbrace{\dots}_{\text{rouge}} \underbrace{\dots}_{\text{vert}}, \underbrace{\dots}_{\text{vert}} \dots$$

$$10^{k+p} \cdot x - 10^k \cdot x = \text{entier} \Rightarrow x = \frac{\text{entier}}{10^{k+p} - 10^k} \in \mathbb{Q}$$



On peut essayer sur un exemple : $x = 45,7836565 \dots$

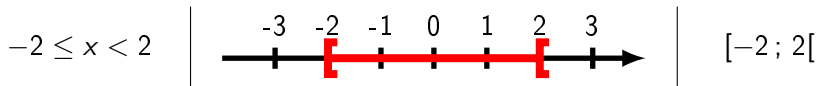
VI. Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels :

- supérieurs (strictement) à un réel a ,
- inférieurs (strictement) à un réel b .

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels :

- supérieurs (strictement) à un réel a ,
- inférieurs (strictement) à un réel b .



Ne pas confondre $\{a; b\}$ et $[a; b]$!



Ces écritures sont équivalentes :

$$a \leq x < b \Leftrightarrow a \leq x \text{ ET } x < b \Leftrightarrow x \in [a; b[$$

L'infini : ∞

∞ n'est pas nombre réel : $\infty \notin \mathbb{R}$.

∞ est **un concept**, une idée : « aussi grand que l'on veut »

L'infini : ∞

∞ n'est pas nombre réel : $\infty \notin \mathbb{R}$.

∞ est **un concept**, une idée : « aussi grand que l'on veut »

Exemple : $-2 \leq x$

x peut être aussi grand que l'on veut.

$$-2 \leq x \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2; +\infty[$$

L'infini : ∞

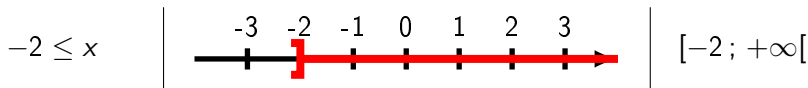
∞ n'est pas nombre réel : $\infty \notin \mathbb{R}$.

∞ est **un concept**, une idée : « aussi grand que l'on veut »

Exemple : $-2 \leq x$

x peut être aussi grand que l'on veut.

$$-2 \leq x \Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[$$



L'infini : ∞

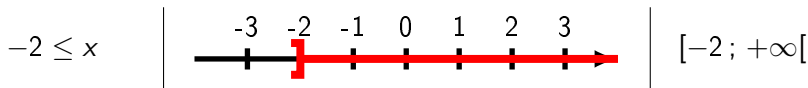
∞ n'est pas nombre réel : $\infty \notin \mathbb{R}$.

∞ est **un concept**, une idée : « aussi grand que l'on veut »

Exemple : $-2 \leq x$

x peut être aussi grand que l'on veut.

$$-2 \leq x \Leftrightarrow x \in [-2; +\infty[$$



$$\mathbb{R} =] - \infty ; +\infty [$$



Le symbole ∞ s'appelle une **lemniscate**.



Union et intersection d'intervalles : voir le TD sur les opérateurs logique **OU** et **ET**.

Exercice 4 Feuille d'exercices

Idem 73; 74

Exercice 5 97 page 25, code de Gardner avec $\frac{12618814001}{625 \times 10^8}$