

S'il est faux que « Toutes les voitures rapides sont rouges », peut-on conclure que « Toutes les voitures rapides ne sont pas rouges » ? C'est ce à quoi on va essayer de répondre dans ce TD.

Les expressions « quel que soit... » et « il existe au moins un... » sont appelées **quantificateurs**. Ils servent à préciser quels sont les éléments qui vérifient une propriété, « tous », « certains » ou « au moins un ».

I. Quantificateur universel $\forall$

On dit : « quel que soit... », « pour tout... », et on peut utiliser le symbole $\forall$.

Dites quelle propriété est vraie et réfutez la fausse par un contre-exemple :

- 1) Quelque soit le réel x , $x^2 \geq 0$. (On pourrait écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$)
- 2) Tout parallélogramme a des diagonales de mêmes longueurs.

II. Quantificateur existentiel $\exists$

On dit « il existe un... », et on peut utiliser la notation $\exists$.

Dites quelle est la proposition vraie et réfutez la fausse :

- 1) Il existe un entier naturel divisible par 2 et par 3. (On pourrait écrire $\exists n \in \mathbb{N}, 2|n$ et $3|n$)
- 2) Il existe un triangle ABC tel que $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 100^\circ$.

III. Négation

- « Il existe x tel que A »

Nier cette proposition revient à affirmer : « Pour tout x , $\overline{A}$ ».

- « Pour tout x , A »

Nier cette proposition revient à affirmer : « Il existe x tel que $\overline{A}$ ».

Exprimez la négation de « Toutes les voitures rapides sont rouges ».

IV. Exercices

- 1) f est une fonction définie sur $[-4 ; 4]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

En exploitant les informations données, justifiez pour chacune des propositions, si elle est vraie ou fausse.

- a) $\exists x \in [-4 ; 4], f(x) < 0$.
- b) $\forall x \in [-4 ; 4], f(x) < 0$.
- c) $\forall x \in [-4 ; 4], f(x) < 3$.
- d) $\exists x \in [-4 ; 4], f(x) \geq 3$.

x	-4	-1	4
$f(x)$	-5	2	-2

- 2) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(a) Il existe un réel x tel que $x^2 = 36$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$

(c) Pour tout x réel, $x^2 = -2x + 3$.

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -2x + 3$.

(e) Pour tout réel $x \neq 4, \frac{3x-10}{x-4} = \frac{2}{x-4} + 3$

(f) Il existe un réel x tel que $\frac{3x-10}{x-4} = 3$.

(g) Il existe un réel x tel que $\frac{2}{x-4} = 3$.

(h) Il existe un réel x tel que $-x^2 + 4x - 2 \leq -(x-2)^2$.

(i) Pour tout réel x , $x - x^2 + 4x - 2 \leq -(x+3)^2$.

(j) $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x = 0$.