



Calcul littéral : $+$, $-$ et $\times$



Quand vous verrez ce pictogramme, cela voudra dire qu'il ne faut pas recopier dans votre cours.

Je fais parfois des commentaires qu'il n'est pas nécessaire de connaître.

Vous pourrez toujours les retrouver dans les cours disponibles sur internet.



Des opérations et des relations

Un ensemble de nombres n'est pas juste une collection de nombres posés les uns à côté des autres.

Un ensemble de nombre possède aussi des opérations comme $+$, $-$ et $\times$, $\div$, $\sqrt{\quad}$ et des relations comme $\leq$.

On appelle **algèbre** l'ensemble des règles concernant les opérations.

Le mot vient du nom d'un ouvrage de résolution d'équations écrit par Al-Khwarizmi, celui auquel on doit aussi le mot algorithme !

l. + et -

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A1) **Stabilité** : $a + b \in \mathbb{R}$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A1) **Stabilité** : $a + b \in \mathbb{R}$

(A2) **Commutativité** : $a + b = b + a$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A1) **Stabilité** : $a + b \in \mathbb{R}$

(A2) **Commutativité** : $a + b = b + a$

(A3) **Associativité** : $a + (b + c) = (a + b) + c$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A1) **Stabilité** : $a + b \in \mathbb{R}$

(A2) **Commutativité** : $a + b = b + a$

(A3) **Associativité** : $a + (b + c) = (a + b) + c$

(A4) **Élément neutre** : $\mathbb{R}$ contient un élément noté 0 qui vérifie
pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A1) **Stabilité** : $a + b \in \mathbb{R}$

(A2) **Commutativité** : $a + b = b + a$

(A3) **Associativité** : $a + (b + c) = (a + b) + c$

(A4) **Élément neutre** : $\mathbb{R}$ contient un élément noté 0 qui vérifie pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$

(A5) **Opposé** : $\forall a \in \mathbb{R}$, on trouvera dans $\mathbb{R}$ un **unique** élément, noté $(-a)$ tel que $a + (-a) = 0$

On convient de noter : $a - b = a + (-b)$



Des remarques...

- + **Associatif** : l'ordre entre les + n'est pas important.

$$(4 + 9) + 3 = 4 + (9 + 3) = 16$$

Et alors les parenthèses sont inutiles.



Des remarques...

- + **Associatif** : l'ordre entre les + n'est pas important.

$$(4 + 9) + 3 = 4 + (9 + 3) = 16$$

Et alors les parenthèses sont inutiles.

- - n'est pas commutatif.

$$6 - 3 \neq 3 - 6$$



Des remarques...

- + **Associatif** : l'ordre entre les + n'est pas important.

$$(4 + 9) + 3 = 4 + (9 + 3) = 16$$

Et alors les parenthèses sont inutiles.

- - n'est pas commutatif.

$$6 - 3 \neq 3 - 6$$

- - n'est pas associatif.

$$6 - (4 - 1) \neq (6 - 4) - 1$$



Le $(-)$ des calculatrices...

Certaines calculatrices (TI, Casio mais pas Numworks) ont une touche $(-)$ et une touche $(-)$.

- $(-)$ sert pour la soustraction habituelle comme $4 - 5$.
C'est un opérateur binaire, c'est à dire qu'il prend deux opérandes : $a - b$.
- $(-)$ sert pour l'opposé, comme (-5) .
C'est un opérateur unaire, c'est à dire qu'il prend une opérande : $-a$.

⚠ ne pas confondre : par exemple $4(-)5$ donne le résultat -20 !

...car la calculatrice comprend $4(-5)$

Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, -(x - y) = y - x$

Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, -(x - y) = y - x$

démonstration

Montrons que le calcul suivant donne 0.

$$(x - y) + (y - x) =$$

Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, -(x - y) = y - x$

démonstration

Montrons que le calcul suivant donne 0.

$$(x - y) + (y - x) = x + (-y) + y + (-x) =$$

Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, -(x - y) = y - x$

démonstration

Montrons que le calcul suivant donne 0.

$$(x - y) + (y - x) = x + (-y) + y + (-x) = 0 + 0 = 0$$

Démontrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, -(x - y) = y - x$

démonstration

Montrons que le calcul suivant donne 0.

$$(x - y) + (y - x) = x + (-y) + y + (-x) = 0 + 0 = 0$$

On peut conclure que $(y - x)$ est l'opposé de $(x - y)$, autrement dit

$$-(x - y) = y - x$$



On peut démontrer de la même façon que $-(x + y) = -x - y$.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -(-x) = x$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -(-x) = x$

démonstration

$$\begin{aligned} -(-x) &= -(0 - x) \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, -(-x) = x$

démonstration

$$\begin{aligned} -(-x) &= -(0 - x) \\ &= x - 0 \\ &= x \end{aligned}$$

II. $\times$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A6) **Stabilité** : $a \times b \in \mathbb{R}$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A6) **Stabilité** : $a \times b \in \mathbb{R}$

(A7) **Commutativité** : $a \times b = b \times a$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A6) **Stabilité** : $a \times b \in \mathbb{R}$

(A7) **Commutativité** : $a \times b = b \times a$

(A8) **Associativité** : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A6) **Stabilité** : $a \times b \in \mathbb{R}$

(A7) **Commutativité** : $a \times b = b \times a$

(A8) **Associativité** : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(A9) **Distributivité** : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Distribuer, c'est développer.

Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$

(A6) **Stabilité** : $a \times b \in \mathbb{R}$

(A7) **Commutativité** : $a \times b = b \times a$

(A8) **Associativité** : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

(A9) **Distributivité** : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Distribuer, c'est développer.

(A10) **Élément neutre** : $\mathbb{R}$ contient un élément $1 \neq 0$ qui vérifie
 $\forall a \in \mathbb{R}, a \times 1 = a$

Conventions :

- On décide que $\times$ est prioritaire sur $+$ (et donc $-$) ce qui permet d'économiser des parenthèses.

Conventions :

- On décide que $\times$ est prioritaire sur $+$ (et donc $-$) ce qui permet d'économiser des parenthèses.
- On peut écrire $a \times b$ ou $a \cdot b$ ou ab .

Conventions :

- On décide que $\times$ est prioritaire sur $+$ (et donc $-$) ce qui permet d'économiser des parenthèses.
- On peut écrire $a \times b$ ou $a \cdot b$ ou ab .
- On peut écrire a^2 pour $a \times a$,
 a^3 pour $a \times a \times a \dots$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$



Bien sûr, vous **savez** que $x \cdot 0 = 0$. Le « jeu » ici est de le prouver en n'utilisant que les axiomes et la logique.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$



Bien sûr, vous **savez** que $x \cdot 0 = 0$. Le « jeu » ici est de le prouver en n'utilisant que les axiomes et la logique.

démonstration

Faisons le calcul suivant de deux façons différentes.

$$\begin{aligned} x \cdot (1 + 0) - x &= \\ &= \end{aligned}$$

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0$



Bien sûr, vous **savez** que $x \cdot 0 = 0$. Le « jeu » ici est de le prouver en n'utilisant que les axiomes et la logique.

démonstration

Faisons le calcul suivant de deux façons différentes.

$$\begin{aligned} x \cdot (1 + 0) - x &= x \cdot 1 - x = x - x &&= 0 \\ &= x \cdot 1 + x \cdot 0 - x = x + x \cdot 0 - x = x \cdot 0 + 0 &&= x \cdot 0 \end{aligned}$$

On peut conclure que $x \cdot 0 = 0$.



Attention



$\times$ se distribue sur un seul bloc $+$ ou $-$, pas sur plusieurs !



Attention



$\times$ se distribue sur un seul bloc $+$ ou $-$, pas sur plusieurs !

Exemple :

$$10 \times (3 + 4 - 5) \times (7 + 8) = \dots$$

On peut distribuer 10 sur l'un ou l'autre bloc, pas les deux !



Attention



$\times$ se distribue sur un seul bloc $+$ ou $-$, pas sur plusieurs !

Exemple :

$$10 \times (3 + 4 - 5) \times (7 + 8) = \dots$$

On peut distribuer 10 sur l'un ou l'autre bloc, pas les deux !

$$\dots(30 + 40 - 50) \times (7 + 8)$$

- **Développer**, c'est distribuer :

$$a(b + c) \rightleftharpoons ab + ac$$

- **Factoriser** consiste à faire le calcul dans l'autre sens :

$$ab + ac \rightleftharpoons a(b + c)$$



Remarque : Il doit être clair pour vous que $ab + ac$, c'est la même chose que $(a \times b) + (a \times c)$.

Démontrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot (-b) = -a \cdot b$

Démontrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot (-b) = -a \cdot b$

démonstration

Montrons, en factorisant, que le calcul suivant donne 0.

$$a \cdot b + a \cdot (-b) =$$

Démontrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot (-b) = -a \cdot b$

démonstration

Montrons, en factorisant, que le calcul suivant donne 0.

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

Démontrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot (-b) = -a \cdot b$

démonstration

Montrons, en factorisant, que le calcul suivant donne 0.

$$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

$a \cdot (-b)$ est l'opposé de $a \cdot b$, donc $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$.

 On peut poursuivre et montrer que $(-a) \times (-b) = ab$, ce qui est la fameuse **règle des signes** : $- \times - = +$



La « double distributivité »

Distribuer

$$(a + b) \cdot (c + d + e)$$



La « double distributivité »

Distribuer

$$(a + b) \cdot (c + d + e) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d + (a + b) \cdot e$$



La « double distributivité »

Distribuer

$$(a + b) \cdot (c + d + e) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d + (a + b) \cdot e$$



La « double distributivité »

Distribuer

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (c + d + e) &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d + (a + b) \cdot e \\ &= a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d + a \cdot e + b \cdot e \end{aligned}$$



On pourrait refaire ce travail à chaque fois. Mais c'est **long**. Il faut apprendre des automatismes pour gagner du temps.



Pour tout a et $b \in \mathbb{R}$,

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Démontrer ces égalités.

Exercice 3 Utilisez les identités remarquables pour calculer

a) 51^2

b) 49^2

c) $131^2 - 130^2$

idem 59, 60, 62 p 81

Exercice 4 Complétez

a) $(x + \dots)^2 = \dots x^2 + \dots x + 64$

b) $(\dots - 5) = 4x^2 - \dots x + \dots$

c) $(7x + \dots) \cdot (7x - \dots) = \dots x^2 - 121$

idem 43, 66, 67

Exercice 5 Factorisez

a) $x^2 + 18x + 81$

b) $4x^2 - 12x + 9$

c) $49 + 70t + 25t^2$

d) $81 - 16y^2$

idem 68 – 70 p 81

Exercice 6 Des développements...

comme 35, 36, 48, 49, 51, 53 p 79–80

Exercice 7 Des factorisations...

comme 37, 38 p 79

Exercice 8

- a) Vérifiez que $4^2 - 3^2 - 2^2 + 1^2 = 4$
- b) Vérifiez que $17^2 - 16^2 - 15^2 + 14^2 = 4$
- c) On généralise : montrez que pour tout n

$$(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$$