

Calcul littéral : $\leq$, $<$, supplément

Axiome : $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné.

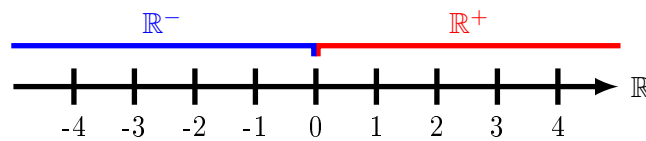
Cela veut dire que l'on peut toujours comparer deux éléments. Soit $a \leq b$, soit $b \leq a$.

Je ne reviens pas sur les évidences que vous connaissez déjà comme

$$\begin{aligned} a &\leq a \\ \text{ou } a &\leq b \text{ et } b \leq a \Rightarrow a = b. \\ \text{ou } a &\leq b \text{ et } b \leq c \Rightarrow a \leq c. \end{aligned}$$

Sur la droite des réels,

- les réels à gauche de 0 sont les **négatifs**. Ils forment $\mathbb{R}^-$.
- les réels à droite de 0 sont les **positifs**. Ils forment $\mathbb{R}^+$.
- 0 est à la fois dans $\mathbb{R}^-$ et dans $\mathbb{R}^+$.



Par définition, ces écritures sont équivalentes :

$$x \text{ positif} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow 0 \leq x \Leftrightarrow x \geq 0 \quad (1)$$

En raison de l'axiome, soit $x \geq 0$, soit $x \leq 0$. Donc si x n'est pas positif, il est négatif.

On a vu les règles de signes comme $(-a) \times (-b) = ab$ ou encore $-(-a) = a$.

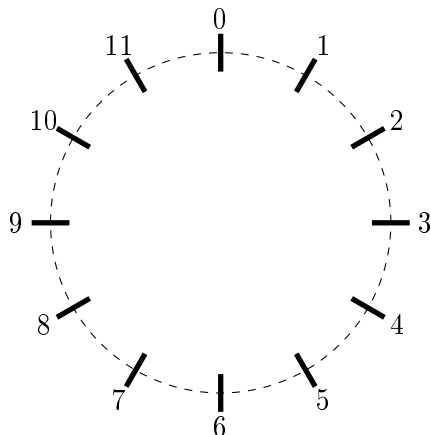
Dans $\mathbb{R}$,

- Les nombres positifs sont ceux qui s'écrivent sans le $-$ par ex. 3, 45
- Les nombres négatifs sont ceux qui s'écrivent avec le $-$ par ex. -3 , -45

La règle des signes fait donc comprendre que :

- positif $\times$ positif = positif
- positif $\times$ négatif = négatif
- négatif $\times$ négatif = positif

Cela semble aller de soi pourtant, on peut créer des ensembles qui obéissent à des règles différentes. Par exemple, prenez les points d'une horloge. Dans ce cas, il n'y a plus vraiment de nombres positifs et de nombres négatifs.



Par exemple, avec ces nombres, $8 + 5 = 1$ ou encore $-2 = 10$!

On a pas le même problème avec $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est construit à partir de $\mathbb{N}$ et quand on définit $\mathbb{N}$, on dit que le successeur de chaque entier est toujours un nouvel entier de sorte qu'on ne fait pas de tours.

On pose également

$$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a \quad (2)$$

Compatibilité avec $+$

Dans la définition de $\mathbb{N}$, faire une addition $+1$, c'est avancer d'un pas sur l'axe $\mathbb{N}$. On comprend alors que si $a \leq b$ c'est-à-dire a à gauche de b sur l'axe, c'est-à-dire $a + 1$ à gauche de $b + 1$ sur l'axe, donc $a + 1 \leq b + 1$.

En généralisant l'idée, on en arrive à :

$\leq$ est compatible avec $+$:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$$

démonstration

On utilise (2).

$$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$$

$$\text{Mais } b - a = b - a + 0 = b - a + (c - c)$$

$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow 0 \leq b - a + (c - c) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (b + c) - (a + c) \\ &\Leftrightarrow a + c \leq b + c \end{aligned}$$

L

'opposé d'un positif est un négatif :

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$$

démonstration

$$a \geq 0 \Leftrightarrow a + (-a) \geq 0 + (-a) \Leftrightarrow 0 \geq -a$$

Compatibilité avec $\times$

Axiome : La multiplication d'un positif par un positif produit un positif.

On peut le justifier par le fait que les positifs sont ceux dont l'écriture portent un $+$ implicite tandis que les négatifs ont un $-$. Cet axiome traduit alors la règle des signes.

Peut-être penserez-vous qu'il est étrange de poser en axiome une règle des signes que nous avons pu démontrer par ailleurs...

Cela vient de notre double approche de $\mathbb{R}$. Nous l'avons décrit tantôt comme un ensemble englobant $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ et tantôt comme un ensemble défini par des axiomes. On ne devrait pas avoir les deux en même temps. On peut définir $\mathbb{R}$ en le construisant à partir de $\mathbb{N}$ (lui-même ayant ses axiomes) **OU (mais pas les deux)** à partir des axiomes. Les deux sont équivalents mais il faut choisir. Et quand on choisit les axiomes, on ne fait aucune hypothèse sur la façon dont s'écrivent les nombres. On raisonne sur les nombres sans se soucier par exemple de leur écriture décimale. On ne peut alors pas dire que les négatifs sont ceux qui s'écrivent avec un $-$.

À partir de l'axiome concernant les positifs, on retrouve les autres :

$$\text{positif} \times \text{négatif} = \text{négatif}$$

$$\text{négatif} \times \text{négatif} = \text{positif}$$

démonstration

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \leq 0,$$

$$\text{Alors } (-b) \geq 0 \Rightarrow a \cdot (-b) \geq 0 \Rightarrow -(a \cdot b) \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$$

Même idée pour le second cas.

1 est positif.

Étonnant que l'on doive démontrer celui-ci ! Mais quand on relis les axiomes, le 1 n'est défini que par sa neutralité devant $\times$. Comme nous savons à quoi correspond le 1 nous savons qu'il est positif et cela nous paraît absurde de le démontrer. Mais quand on se lance dans une approche axiomatique, il faut abandonner tout ce que l'on sait et ne se fonder que sur les axiomes et la logique !

démonstration

$$\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0.$$

Par l'absurde, supposons que 1 négatif. Alors $1 \cdot a$ serait négatif. Mais $1 \cdot a = a$ est positif.

Contradiction. 1 est donc positif.

$\forall c \in \mathbb{R}^*, c$ et son inverse c^{-1} sont de même signe.

démonstration

Par l'absurde, Si c et c^{-1} étaient de signe opposé, alors leur produit serait négatif. Or cela contredit $c \cdot c^{-1} = 1$ qui est positif. Donc c et c^{-1} sont de même signe.

Compatibilité avec $\times$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^{*+}, a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

Multiplier les deux membres d'une inégalité par un strictement positif ne change pas l'inégalité.

démonstration

Sens $\Rightarrow$

utiliser (1) et (2)

$$\begin{aligned} a \leq b \text{ et } 0 < c &\Leftrightarrow (a - b) \leq 0 \text{ et } 0 < c \\ &\Rightarrow (a - b) \cdot c \leq 0 \quad \text{Attention ici} \Rightarrow \\ &\Leftrightarrow a \cdot c - b \cdot c \leq 0 \\ &\Leftrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \end{aligned}$$

⚠ à la deuxième ligne on perd le double sens $\Leftrightarrow$ car on peut avoir $(a - b) \cdot c \leq 0$ tout en ayant $c < 0$. Ce sera le cas si $a = b$ et donc $a - b = 0$.

Sens $\Leftarrow$

Même chose en multipliant $ac \leq bc$ par c^{-1} qui a le même signe que c .

Par contre, multiplier les deux membres de l'inégalité par un strictement négatif renverse l'inégalité.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^{*-}, a \leq b \Leftrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$$

démonstration

$-c$ est strictement positif donc

$$a \leq b \Leftrightarrow a \cdot (-c) \geq b \cdot (-c)$$

On ajoute de part et d'autre $a \cdot c + b \cdot c$:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Leftrightarrow a \cdot (-c) + a \cdot c + b \cdot c \geq b \cdot (-c) + a \cdot c + b \cdot c \\ &\Leftrightarrow b \cdot c \geq a \cdot c \end{aligned}$$

On fera attention à ne jamais multiplier une équation ou une inéquation par 0. Ce n'est pas totalement interdit mais cela peut entraîner de grosses erreurs. En effet, on perd un sens de l'équivalence $\Leftrightarrow$ dans le cas $c = 0$.

Pour cela, on peut observer que quelque que soient a et b , $0 \cdot a = 0$ et $0 \cdot b = 0$, donc $0 \cdot a \leq 0 \cdot b$. On peut donc affirmer :

$$a \leq b \Rightarrow 0 \cdot a \leq 0 \cdot b$$

Mais la réciproque est fausse :

$$a \leq b \not\Leftrightarrow 0 \cdot a \leq 0 \cdot b$$

Il suffit d'un contre-exemple pour le prouver :

$$0 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \times 5 \leq 0 \times 2 \text{ mais } 5 \not\leq 2$$

Et cela ne fonctionne pas non plus dans le cas d'inégalité strictes :

$$a < b \not\Leftrightarrow 0 \cdot a < 0 \cdot b$$

Là encore on le voit par un contre-exemple :

$$2 < 5 \text{ mais } 0 \times 2 \not< 0 \times 5$$