

Calcul littéral : inverse

Axiome

(A11) Tout x de $\mathbb{R}^*$ possède **un unique** inverse que l'on peut noter $\frac{1}{x}$ ou x^{-1} tel que : $x \cdot x^{-1} = 1$

Remarque : On note $\mathbb{R}^$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on a enlevé 0.*

Écritures équivalentes

Par définition, $a \div b = a/b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

On rappelle également que la multiplication est **associative**.

Les écritures ci-dessous sont donc totalement équivalentes :

$$\frac{a \cdot b}{c} = (a \cdot b) \div c = a \cdot b \cdot c^{-1} = a \cdot (b \cdot c^{-1}) = a \cdot \frac{b}{c} = \dots$$

À démontrer

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'inverse de l'inverse de x est x .

Pour cela, posez $y = x^{-1}$ et déterminez l'unique réel y^{-1} tel que $y \cdot y^{-1} = 1$.

(b) Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Pour cela utilisez la définition de $\div$ et rappelez vous que $\cdot$ la distributivité de $\cdot$ sur $+$.

(c) Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, b et $d \neq 0$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Pour cela, utilisez la définition de $\div$ et l'associativité de $\cdot$.

(d) Pour $a, b \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Pour cela, utilisez la propriété précédente et la définition de l'inverse.

(e) Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, b, c et $d \neq 0$: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Pour cela, utilisez la propriété précédente et la définition de $\div$.

(f) **Important !**

Pour $A, B \in \mathbb{R}$, $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

Montrez d'abord la réciproque $\Leftarrow$,

Pour $\Rightarrow$, raisonnez ensuite par disjonction des cas : soit $B = 0$ et alors..., soit $B \neq 0$ et alors B a un inverse...