

Calcul littéral : Racine carrée

Rappel définition

x	0	α	$+\infty$
x^2	0	a	$+\infty$

Le tableau de variation de la fonction carré nous montre que pour tout $a \geq 0$, il existe une unique valeur $\alpha \geq 0$ telle que $\alpha^2 = a$. On appelle **racine carrée** de a cette valeur et on note $\alpha = \sqrt{a}$.

Il s'en suit que $\sqrt{a} \geq 0$.

À prouver

*Vous n'utiliserez que des propriétés connues concernant les manipulations d'inégalités/égalités, les propriétés de la fonction **carré** et la définition de la racine.*

(a) Justifier que $0 \leq a < b \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

On en conclut que la fonction **racine** est **strictement croissante**.

(b) Justifier que pour tout $M \in \mathbb{R}$, on peut trouver a tel que $\sqrt{a} \geq M$.

Cela en plus du point précédent montre que la fonction **racine** $\nearrow^{+\infty}$.

(c) Montrer que pour a et b positifs, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

(d) Montrer que pour a et b positifs, $b \neq 0$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

(e) On veut prouver que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Pour cela :

- i. développer $(\sqrt{a+b})^2$,
- ii. développer $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$,
- iii. comparer et conclure.

Attention : en général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Le seul cas où il y a égalité est quand $a = 0$ ou $b = 0$.

(f) On s'intéresse à $(\sqrt{a})^2$.

- i. Pour quelles valeurs de a cette quantité est-elle définie ?
- ii. Justifier que cette quantité est égale à a .

(g) On s'intéresse à $\sqrt{a^2}$.

- i. Pour quelles valeurs de a cette quantité est-elle définie ?
- ii. Justifier que cette quantité est égale à $|a|$.

Des deux calculs précédents, on déduit que $(\sqrt{a})^2$ n'est pas exactement la même chose que $\sqrt{a^2}$. Mais si on se limite à $a \geq 0$, les deux calculs donnent le même résultat.

(h) On sait que $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ car tout carré est positif.

- i. développer,
- ii. en déduire que $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$