

Si $A, B \in \mathbb{R}$ alors :

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ OU } B = 0$$

Nous allons utiliser cette propriété pour résoudre des que l'on peut **factoriser** sous forme d'un produit.

Factorisation avec identités remarquables. Exemple : $4x^2 + 12x + 5$

On regarde le début de l'expression : $4x^2 + 12x$. Cela ressemble au développement d'une identité remarquable : $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$. On va l'utiliser.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 5 &= 4x^2 + 12x + 9 - 4 \\ &= (2x + 3)^2 - 4 \quad \text{forme : } a^2 - b^2 \dots \\ &= [(2x + 3) + 2] \cdot [(2x + 3) - 2] \\ &= (2x + 5) \cdot (2x + 1) \end{aligned}$$

Résolution. Exemple : $x^2 + x = 2$

Les manipulations algébriques simples ne permettront pas d'arriver au résultat. On essaie à la place d'écrire cette équation comme un produit nul :

- placer tous les termes à gauche, laissant 0 à droite,
- chercher une factorisation (c'est la partie difficile),
- conclure en utilisant la propriété $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ OU } B = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + x = 2 &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2) \cdot (x - 1) = 0 \end{aligned}$$

En général, on vous aidera pour faire la factorisation. Par exemple, dans un exercice, on vous dirait : « Montrez que $(x + 2) \cdot (x - 1) = x^2 + x - 2$ » ce qui est facile à justifier en développant.

$$\begin{aligned} x^2 + x = 2 &\Leftrightarrow (x + 2) = 0 \text{ OU } (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ OU } x = 1 \end{aligned}$$

Cette équation a donc deux solutions : -2 et 1.

*Attention : le **et** du langage courant correspond ici plutôt au **ou** logique. Quand on dit que -2 **et** 1 sont solutions, on veut dire que x peut prendre l'une **ou** l'autre valeur, mais pas les deux en même temps.*

Cas sans solution. Exemple : $4x^2 + 12x + 10 = 0$

On a l'idée de factoriser. Pour cela on pense faire comme au-dessus avec les identités remarquables :

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 10 &= 4x^2 + 12x + 9 + 1 \\ &= (2x + 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

Mais cette fois, on n'a pas la forme $a^2 - b^2$ et il semble que nous soyons coincés...

Revenons à l'équation. Avec notre factorisation inachevée nous avons :

$$(2x + 3)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)^2 = -1$$

Mais un carré est toujours positif. On en conclut que cette équation n'a pas de solution.

On voit que l'impossibilité de factoriser est liée à l'inexistence de solution.