

Exercice 1 La démonstration corrigée est déjà dans le cours

Exercice 2 Je ne corrige pas la feuille d'exercices faite en TD...

Exercice 3

- a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF}$
- b) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$
- c) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AS}$
- d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AF} = \vec{0}$
- e) $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KI} + \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{KL}$

Exercice 4

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- b) $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{CF}$
- c) $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RP}$
- d) $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{LG}$ ou encore
 $\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{GG}$ puisque les deux sont $\vec{0}$

Exercice 5 Règle du parallélogramme

Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Correction :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow (ABDC) &\text{ est un parallélogramme}\end{aligned}$$

Exercice 6 Soit ABC triangle quelconque.

I est l'image de C par $T_{\overrightarrow{AC}}$; J est l'image de C par $T_{\overrightarrow{BC}}$.

Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$.

Correction :

« I est l'image de C par $T_{\overrightarrow{AC}}$ » peut s'écrire $T_{\overrightarrow{AC}}(I) = C$ et par définition cela signifie que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CI}$.

L'un des intérêts des vecteurs, c'est qu'il permettent de remplacer une écriture en français comme « I est l'image de C par $T_{\overrightarrow{AC}}$ » par une écriture algébrique comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CI}$ qui va permettre de poursuivre sous forme de calculs ce qui est beaucoup plus efficace.

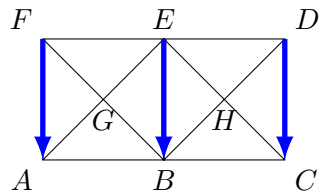
De la même façon, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CJ}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JI}$$

L'algèbre des vecteurs nous permet de remplacer toutes les longues justifications avec des mots.

D'un point de vue plus classique, on aurait pu aussi dire : C est milieu de $[AI]$ et de $[BJ]$, donc les diagonales de $ABIJ$ se coupent en leurs milieux, donc $ABIJ$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JI}$.

Exercice 7

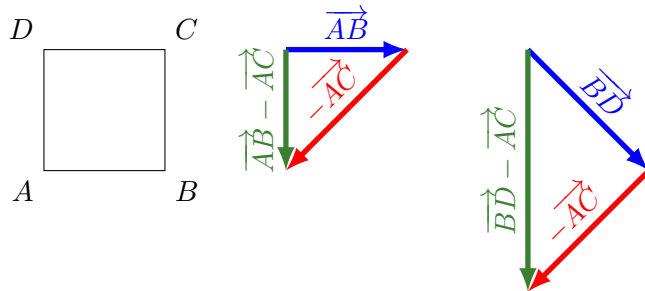


Complétez

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB}$
- b) Dans la suivante, il faut comprendre qu'il faut remplacer $\overrightarrow{EB}$ par un vecteur égal sur la figure mais qui permettra de simplifier l'expression. Sur la figure on voit que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$.
On peut donc écrire :
- c) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB}$

Exercice 8 Soit $ABCD$ un carré. Dessinez-le puis tracez les vecteurs suivants (dessinez la flèche) :

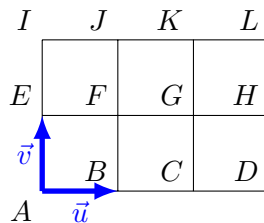
- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- b) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC}$



Exercice 9

- a) $\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FS} = \vec{0}$
ou encore
 $\overrightarrow{SS} - \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FG} = \vec{0}$
- b) $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{TS} = -\overrightarrow{UR}$

Exercice 10



Exprimez les différents vecteurs en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Par exemple $\overrightarrow{AH} = 3\vec{u} + \vec{v}$.

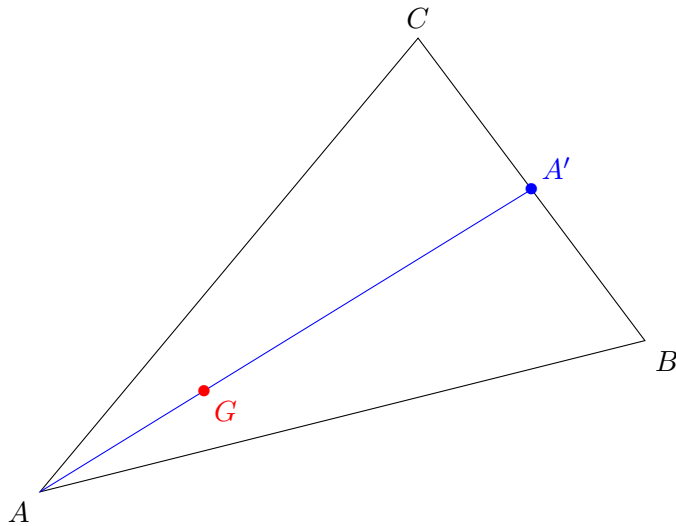
- a) $\overrightarrow{AK} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$
- b) $\overrightarrow{LC} = -\vec{u} - 2\vec{v}$
- c) $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{KD} = 2\vec{u} - \vec{v}$
- d) $\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{JD} = 3\vec{v}$

Exercice 11

- Soit A , B et C trois points non alignés,
- A' milieu de $[BC]$, B' milieu de $[AC]$,
- G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

▲ Difficile

a) Faites une figure.



b) Exprimez $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On sait d'abord que comme A' est milieu de $[BC]$ alors $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.
On peut maintenant faire le calcul :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} \\ &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AA'} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

c) D duisez-en $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

d) Montrez que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} \\ &= 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Exercice 12

- Soit A , B , C et D , quatre points du plan,
- I milieu de $[AB]$, J milieu de $[CD]$,
- G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

A Difficile

a) Pour prouver l'existence de G , exprimez $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow -4\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow -4\overrightarrow{AG} &= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}
 \end{aligned}$$

b) Montrez que $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$.

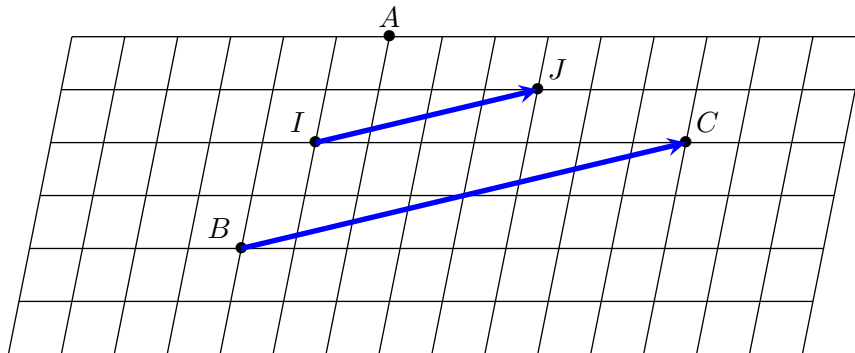
$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} &= \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GJ} \\
 &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DJ} \\
 &= \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DJ}}_{\vec{0}} \\
 &= \vec{0} \\
 \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

On en déduit que G est le milieu de $[IJ]$.

Exercice 13 Soient A , I et J trois points.

- soit C l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ}$,
- soit B l'image de J par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AI}$,

a) Faire une figure,



b) montrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$,

« C l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ}$ » se traduit par $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ}$. Nous partons donc de là.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} \\
 \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{IJ} \\
 \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{AJ} \\
 \overrightarrow{JC} &= \overrightarrow{AJ}
 \end{aligned}$$

c) montrer que $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JC}$,

De la même façon :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JB} &= \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{JB} - \overrightarrow{JI} &= \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{JI} \\ \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{IB} &= \overrightarrow{AI}\end{aligned}$$

d) montrer que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} \\ &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} \\ &= 2\overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$

Une autre démonstration possible :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AJ} \\ &= 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) \\ &= 2\overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$