

Vecteurs – supplément

Définition

Quelle définition ? On peut définir les vecteurs en partant de la géométrie. C'est ce que nous allons faire. On devra donc partir de la géométrie pour prouver que les vecteurs ont bien les propriétés qu'on leur donne.

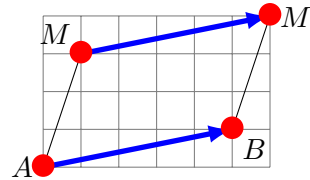
Comme pour $\mathbb{R}$, on pourrait également définir les vecteurs par des axiomes. On doterait alors les vecteurs de propriétés sans avoir à les démontrer puisqu'il s'agirait d'axiomes. Cela nous permettrait de travailler sur des vecteurs abstraits, pas forcément en rapport avec la géométrie. En revanche, si nous voulions utiliser ces vecteurs ainsi définis en géométrie, il faudrait prouver que les axiomes correspondent bien à une réalité géométrique.

Les vecteurs comme nous allons les définir ne sont qu'un cas particulier. L'approche axiomatique permet d'accéder à une généralité plus grande. C'est plus abstrait mais c'est plus puissant.

Définition

La translation qui transforme A en B est une transformation qui transforme tout point M en M' tel que $ABM'M$ soit un **parallélogramme**.

C'est la **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $T_{\overrightarrow{AB}}$.



Égalité de vecteurs

Propriété

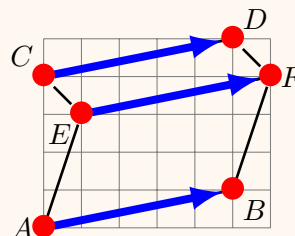
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

▲ *ordre des points.*

démonstration

Démo du sens $\Rightarrow$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

Les deux vecteurs étant égaux, les translations correspondantes ont le même effet.



Prenons E quelconque et son image F par $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$ (même translation donc même image)

Par définition de la translation, $ABFE$ et $CDFE$ sont des parallélogrammes, donc $(CD) \parallel (EF) \parallel (AB)$ et $CD = EF = AB$ et $C \rightarrow D$, $E \rightarrow F$, $A \rightarrow B$ sont dans le même sens. On en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

démonstration

Suite...

Démo du sens $\Leftarrow$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftarrow ABDC$ est un parallélogramme.

C'est à peu près la même chose : Prenons E quelconque et son image F par $T_{\overrightarrow{CD}}$. Alors $EFDC$ est un parallélogramme. Comme $ABDC$ est aussi un parallélogramme alors $ABFE$ est un parallélogramme. Donc l'image de E par $T_{\overrightarrow{AB}}$ est F .

Comme on a fait ce raisonnement pour E quelconque, alors les deux translations ont le même effet pour tous les points et sont identiques : $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Vecteur nul

La translation $\overrightarrow{AA}$ correspond à ne rien changer.

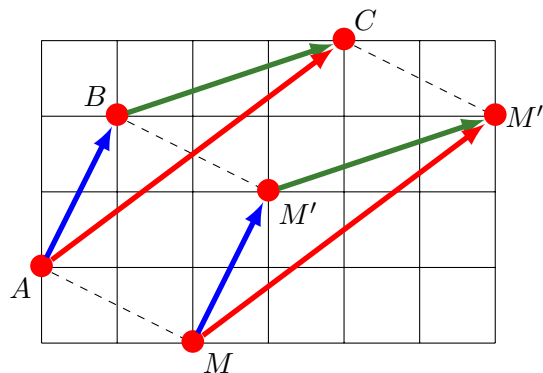
Définition

On note $\vec{0}$ le **vecteur nul** qui correspond à une translation qui ne change rien.

- $\|\vec{0}\| = 0$,
- $\vec{0}$ n'a pas de direction et n'a pas de sens.

Somme de deux vecteurs**Définition**

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ est le vecteur correspondant à la translation obtenue en enchaînant les translations $T_{\overrightarrow{AB}}$ et $T_{\overrightarrow{BC}}$.

**démonstration**

Il faut prouver que la succession de deux translation est bien une translation, autrement dit il faut prouver que $ACM''M$ est un parallélogramme.

- $M' =$ image de M par $T_{\overrightarrow{AB}}$. Donc $ABM'M$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM'}$.
- $M'' =$ image de M' par $T_{\overrightarrow{BC}}$. Donc $BCM''M'$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{CM''}$.
- Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM''}$, donc $ACM''M$ est un parallélogramme.

$T_{\overrightarrow{AB}}$ suivi de $T_{\overrightarrow{BC}}$ est donc identique à $T_{\overrightarrow{AC}}$.

Vecteur opposé

On a vu que, dans $\mathbb{R}$, pour tout réel a , il existe **un unique** réel $(-a)$ tel que $a + (-a) = 0$. Donc si on trouve un b qui vérifie $a + b = 0$ alors $b = (-a)$, c'est l'opposé de a .

On reproduit le même raisonnement sur les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

Cela nous amène à proposer l'idée de **vecteur opposé**.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

On sait que $(AB) = (BA)$, $AB = BA$, seul les sens $A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$ diffèrent. Cela nous amène à la définition...

Définition

L'opposé de $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$ et

- $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont même direction,
- $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont même norme,
- $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont sens opposés.

On pourra noter $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Multiplication par un réel

Il vient naturellement des calculs comme

$$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\vec{u}$$

Le vecteur $3\vec{u}$ aura donc la même direction que $\vec{u}$, une norme 3 fois plus grande et le même sens.

On souhaite généraliser cette notation en $k\vec{u}$ avec k un nombre. Avant de définir formellement, explorons un peu.

- Si $k \in \mathbb{N}$, c'est naturel comme l'exemple $3\vec{u}$
- si $k \in \mathbb{Z}$ et $k < 0$, c'est la même chose avec un changement de sens. Par exemple $-3\vec{u}$ est comme $3\vec{u}$ mais avec un sens opposé.
- Puisque on sait ce qu'est $\vec{w} = 3\vec{u}$ alors on peut dire que $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{w}$ et ainsi on a pas de mal à comprendre ce que signifie $k\vec{u}$ pour $k \in \mathbb{Q}$.
- Pour $k \in \mathbb{R}$ c'est beaucoup plus délicat. L'idée est que l'on peut toujours $x \in \mathbb{R}$ par $q \in \mathbb{Q}$ avec autant de précision que l'on veut. Mais le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ est difficile et il est d'ailleurs arrivé tard dans l'histoire des mathématiques.

Définition

$k\vec{u}$, avec $k \in \mathbb{R}^*$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$, est le vecteur

- de même direction que $\vec{u}$
- de norme $|k| \cdot \|\vec{u}\|$,
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens opposé sinon.

Comme $\vec{0}$ n'a ni sens ni direction il faut le traiter à part : Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Les calculs

Tous les calculs évidents sont valide !

Propriétés

- (1) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- (2) $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
- (3) $(a + b) \cdot \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- (4) $a \cdot (b\vec{u}) = (a \cdot b)\vec{u}$

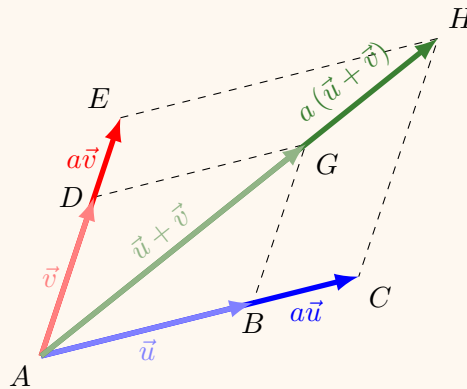
Faut-il le démontrer ? Si nous avions présenté les vecteurs à partir d'axiomes, ces règles de calculs seraient justement les axiomes et il n'y aurait donc pas à les démontrer.

Comme on a présenté les vecteurs en partant de leur lien avec les translations, on doit le démontrer.

démonstration

Démontrons le point (2).

Prenons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques et $a > 0$. On pourrait généraliser à $a < 0$ en tenant compte du changement de sens occasionné. Le cas $a = 0$ est simple.



On prend A quelconque. On construit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et C tel que $\overrightarrow{AC} = a\vec{u}$.

On procède de même pour les autres points. En particulier, on construit H tel que $\overrightarrow{AH} = a(\vec{u} + \vec{v})$.

On a tout naturellement A, G et H alignés et $AH = a \cdot AG$. De même A, B et C alignés et $AC = a \cdot AB$.

On reconnaît une configuration de Thalès. $(CH) \parallel (BG)$ et $CH = a \cdot BG$. On aura donc $\overrightarrow{CH} = a\overrightarrow{BG} = a\vec{v}$.

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH} = a\vec{u} + a\vec{v}$$