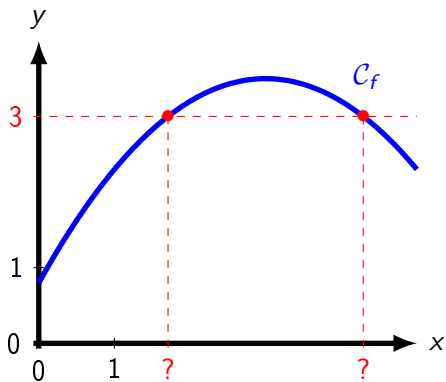




Fonctions

I. Définition



Une fonction est une procédure quelconque qui associe un nombre (ou plusieurs) en **entrée** à un nombre en **sortie**.



Une fonction est une procédure quelconque qui associe un nombre (ou plusieurs) en **entrée** à un nombre en **sortie**.

- Une valeur en **entrée** est appelée **antécédent**,
- une valeur en **sortie** est appelée **image**,
- l'ensemble des antécédents autorisés est l'**ensemble de définition**, souvent noté $\mathcal{D}_f$.

Exemple 1 : tableau de valeur

Taille du pied en cm	22,3	23	23,6	...
pointure	35	36	37	...

Le tableau permet de définir une fonction

$$p : \text{taille} \mapsto \text{pointure}$$



La flèche $\mapsto$ est réservée à cet usage.

On a toujours **antécédent** $\mapsto$ **image**.

On aura $p : \text{antécédent } 22,3 \mapsto \dots$.

Exemple 1 : tableau de valeur

Taille du pied en cm	22,3	23	23,6	...
pointure	35	36	37	...

Le tableau permet de définir une fonction

$$p : \text{taille} \mapsto \text{pointure}$$

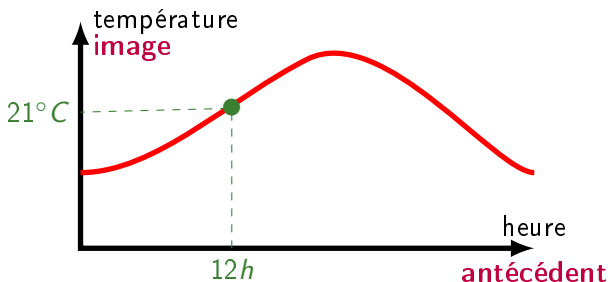


La flèche $\mapsto$ est réservée à cet usage.

On a toujours **antécédent** $\mapsto$ **image**.

On aura $p : \overset{\text{antécédent}}{22,3} \mapsto \overset{\text{image}}{35}$.

Exemple 2 : courbe

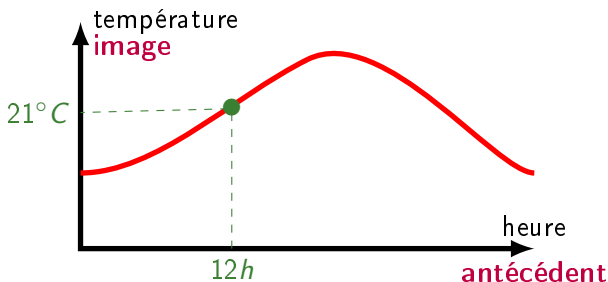


$T : \text{heure} \mapsto \text{température}$

On voit que $T : 12h \mapsto 21^\circ\text{C}$. On peut le noter $T(12h) = 21^\circ\text{C}$.

Dans cet exemple, $\mathcal{D}_T = \dots$.

Exemple 2 : courbe



$T : \text{heure} \mapsto \text{température}$

On voit que $T : 12h \mapsto 21^\circ\text{C}$. On peut le noter $T(12h) = 21^\circ\text{C}$.

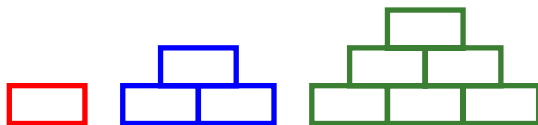
Dans cet exemple, $\mathcal{D}_T = [0h; 24h[$.

Exemple 3 : une procédure

On définit une règle de construction de pyramide.

Pour n_e étages, on s'intéresse au nombre N_b de briques nécessaires.

$$f : n_e \mapsto N_b$$



On observe ici, par exemple, que $f(1) = \dots$; $f(2) = \dots$; $f(3) = \dots$

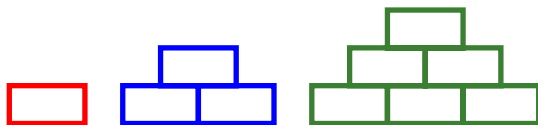
Dans cet exemple, $\mathcal{D}_f = \dots$.

Exemple 3 : une procédure

On définit une règle de construction de pyramide.

Pour n_e étages, on s'intéresse au nombre N_b de briques nécessaires.

$$f : n_e \mapsto N_b$$



On observe ici, par exemple, que $f(1) = 1$; $f(2) = 3$; $f(3) = 6$

Dans cet exemple, $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$.

Exemple 4 : algorithme

1 **début**

2 | Prendre un nombre

3 | Ajouter 1

4 | Mettre au carré

5 | Enlever 2

6 | Renvoyer le résultat

7 **fin**

Par exemple, si on fournit le nombre 5, on obtient en retour ...

antécédent

5 $\mapsto$...

L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \dots$.

Exemple 4 : algorithme

1 **début**

2 | Prendre un nombre

3 | Ajouter 1

4 | Mettre au carré

5 | Enlever 2

6 | Renvoyer le résultat

7 **fin**

Par exemple, si on fournit le nombre 5, on obtient en retour 34.

antécédent **image**
5 $\mapsto$ 34

L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Exemple 5 : expression algébrique

On peut donner directement une expression.

$$f : x \mapsto 3x - 2$$

On peut calculer $f \left(\overset{\text{antécédent}}{15} \right) = 3 \times \dots - 2 = \dots$.

 Ici, il n'y a pas de contrainte sur x . Si on ne dit rien, on devine que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Mais on peut **décider** de restreindre $\mathcal{D}$ et choisir par exemple $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.

On pourrait faire cela par exemple si la fonction vient d'un problème physique et que x représente une distance.

Exemple 5 : expression algébrique

On peut donner directement une expression.

$$f : x \mapsto 3x - 2$$

On peut calculer $f \left(\overset{\text{antécédent}}{15} \right) = 3 \times 15 - 2 = \overset{\text{image}}{28}$.

 Ici, il n'y a pas de contrainte sur x . Si on ne dit rien, on devine que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Mais on peut **décider** de restreindre $\mathcal{D}$ et choisir par exemple $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.

On pourrait faire cela par exemple si la fonction vient d'un problème physique et que x représente une distance.

- x est l'**antécédent**.
- f est la fonction elle-même.
- $f(x)$ est la sortie de f quand on met x en entrée, c'est donc l'**image**.

 Il est fréquent que l'on fasse la confusion entre f et $f(x)$. Attention, f est une fonction, $f(x)$ est un nombre.

Cette distinction est aussi valable en informatique où on fait un grand usage des fonctions.

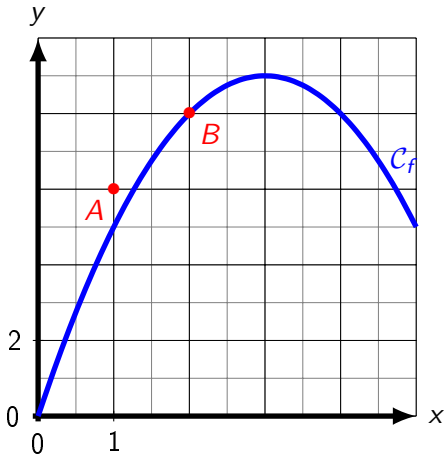
II. Courbes

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et un repère orthogonal.

La **courbe représentative** de f dans le repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que $y = f(x)$.

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et un repère orthogonal.

La **courbe représentative** de f dans le repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que $y = f(x)$.



$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

Le point $A(1; 6)$ est-il sur la courbe ?

→ **NON** car $f(1) = 5 \neq 6$ càd
 $f(x_A) \neq y_A$.

Le point $B(2; 8)$ est-il sur la courbe ?

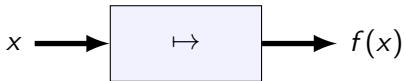
→ **OUI** car $f(2) = 8$ càd
 $f(x_B) = y_B$.



Ne pas confondre !

$$f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$$

f est la **fonction** elle-même.

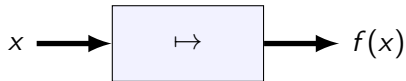




Ne pas confondre !

$$f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$$

f est la **fonction** elle-même.



$f(x)$ est l'**image**.

On peut donner l'**expression** :
comment on calcule l'image

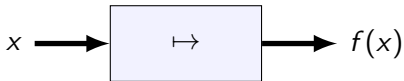
$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$



Ne pas confondre!

$$f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$$

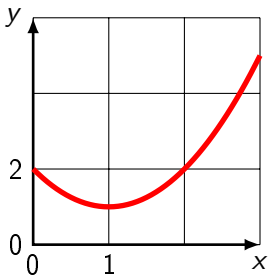
f est la **fonction** elle-même.



$f(x)$ est l'**image**.

On peut donner l'**expression** :
comment on calcule l'image

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$



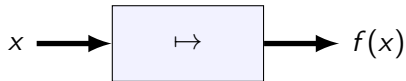
À gauche, la **courbe** représentant la fonction.



Ne pas confondre!

$$f : x \mapsto x^2 - 2x + 2$$

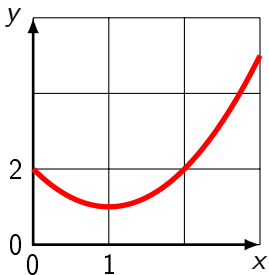
f est la **fonction** elle-même.



$f(x)$ est l'**image**.

On peut donner l'**expression** :
comment on calcule l'image

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$



À gauche, la **courbe** représentant la fonction.

L'**équation** de la courbe

$$y = f(x) \quad \text{càd} \quad y = x^2 - 2x + 2$$

dit quels points appartiennent à la courbe.

Exercice 1 Tracer la courbe de $f : x \mapsto (4 - x) \cdot (x + 3)$ pour $-1 \leq x \leq 4$.

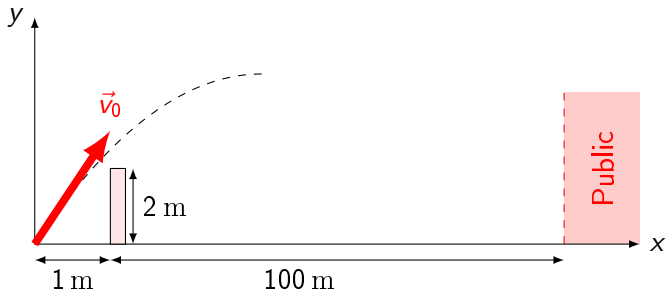
⚠ Important : Savoir le faire sur papier **et** sur calculatrice.

Exercice 2 Un éleveur dispose d'un grillage de 21 m. Il veut fabriquer un enclos rectangulaire le plus grand possible (superficie) pour ses poules. Il s'appuie sur un mur.



Quelles dimensions faut-il donner à l'enclos ?

Exercice 3 94 page 266



On tire une fusée derrière un mur. La fusée doit passer par-dessus le mur. Si la fusée n'explosait pas, il faut qu'elle retombe avant le public.

La trajectoire est donnée par $y = -\frac{50}{v_0^2}x^2 + 3x$

avec x et y en m et v_0 en $m \cdot s^{-1}$.

Quelles sont les valeurs de v_0 possibles ?

Exercice 4 On veut fabriquer une boîte de conserve de forme cylindrique. Le volume de cette boîte est de $0,5 \text{ L} = 500 \text{ cm}^3$.

Quelles dimensions donner à la boîte pour rendre sa surface extérieure minimale et ainsi minimiser la quantité d'acier nécessaire à sa fabrication ?

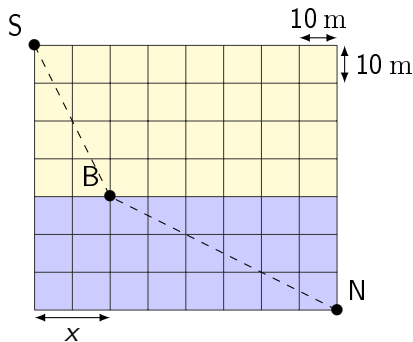
Exercice 5 Sur une plage, un sauveteur S aperçoit un nageur N en danger.

Il cherche le chemin le plus rapide pour l'atteindre.

S sait qu'il court à $v_c = 6 \text{ m/s}$ sur le sable et qu'il nage à $v_n = 2 \text{ m/s}$.

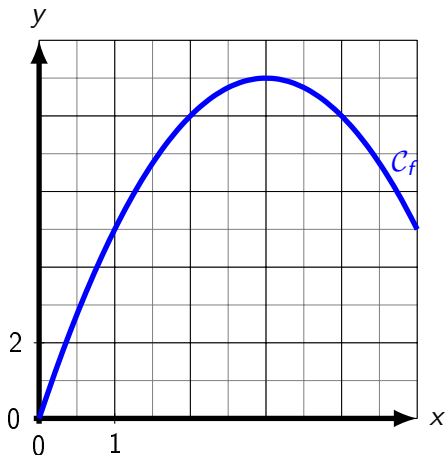
On admet que le plus rapide est de courir en ligne droite jusqu'au bord de l'eau puis de nager en ligne droite. On appelle B le point où le sauveteur atteint l'eau. La position de B est repérée par la valeur x .

Pour quelle valeur de x le chemin est-il le plus rapide ?



III. Résolution graphique

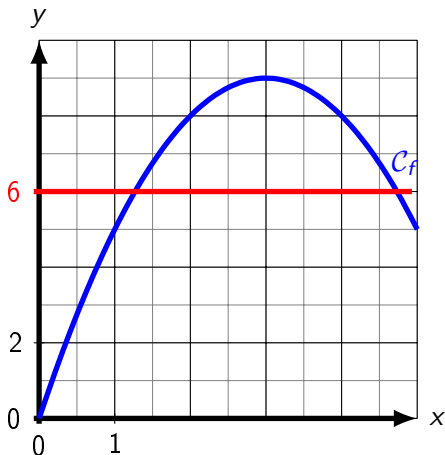
On utilise un graphique pour résoudre une **équation** de type $f(x) = k$.



$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

On veut résoudre $f(x) = 6$

On utilise un graphique pour résoudre une **équation** de type $f(x) = k$.

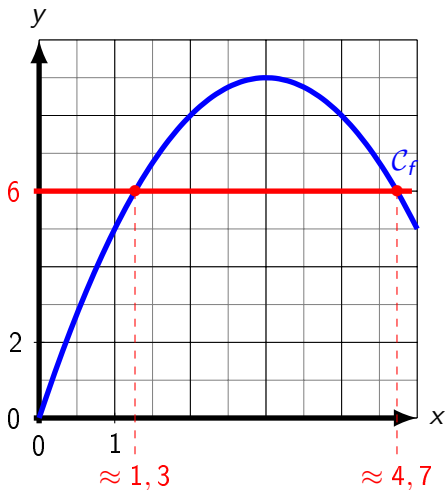


$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

On veut résoudre $f(x) = 6$

- placer une ligne à $y = 6$,

On utilise un graphique pour résoudre une **équation** de type $f(x) = k$.



$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

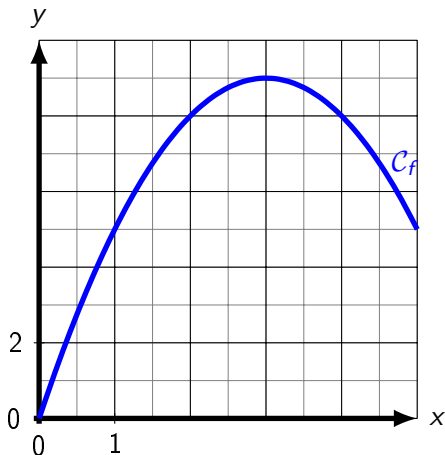
On veut résoudre $f(x) = 6$

- placer une ligne à $y = 6$,
- relever les **abscisses** (x) des intersections avec la courbe.

Les solutions sont $\approx 1,3$ et $\approx 4,7$.

Une solution graphique est **toujours** approximative.

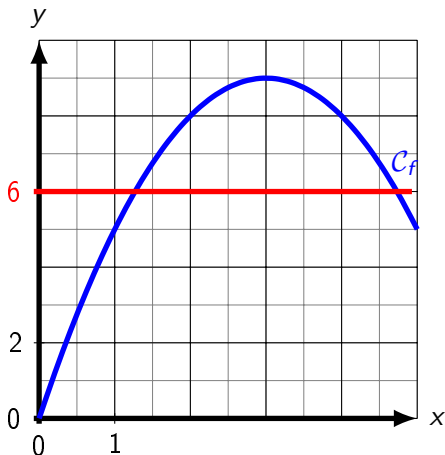
On utilise un graphique pour résoudre une **inéquation** de type $f(x) \leq k$.



$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

On veut résoudre $f(x) \leq 6$

On utilise un graphique pour résoudre une **inéquation** de type $f(x) \leq k$.

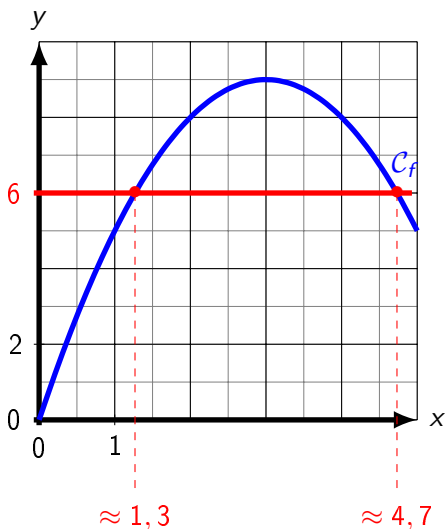


$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

On veut résoudre $f(x) \leq 6$

- placer une ligne à $y = 6$,

On utilise un graphique pour résoudre une **inéquation** de type $f(x) \leq k$.

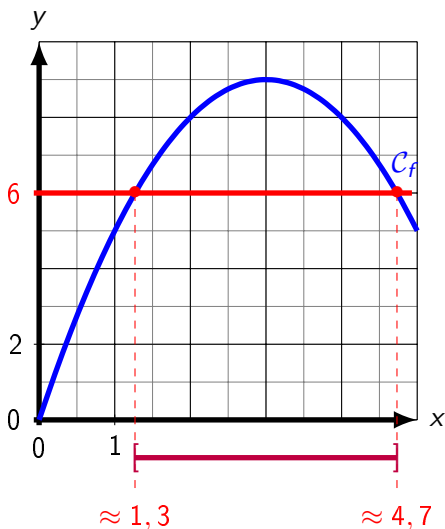


$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

On veut résoudre $f(x) \leq 6$

- placer une ligne à $y = 6$,
- relever les **abscisses** (x) des intersections avec la courbe,

On utilise un graphique pour résoudre une **inéquation** de type $f(x) \leq k$.



$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

On veut résoudre $f(x) \leq 6$

- placer une ligne à $y = 6$,
- relever les **abscisses** (x) des intersections avec la courbe,
- on en déduit l'intervalle solution.

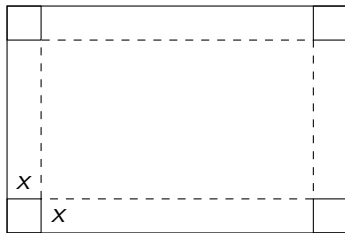
Ici les solutions, $\mathcal{S} \approx [1,3 ; 4,7]$.

Exercice 6

On prend une feuille de papier A4 :
 $210 \text{ mm} \times 297 \text{ mm}$.

On coupe dans les 4 coins un carré de taille x . On pourra ensuite replier les bords pour former une boîte type boîte à chaussure.

Quelle valeur faut-il choisir pour x pour que la boîte ainsi formée ait une capacité de exactement 1 L ?



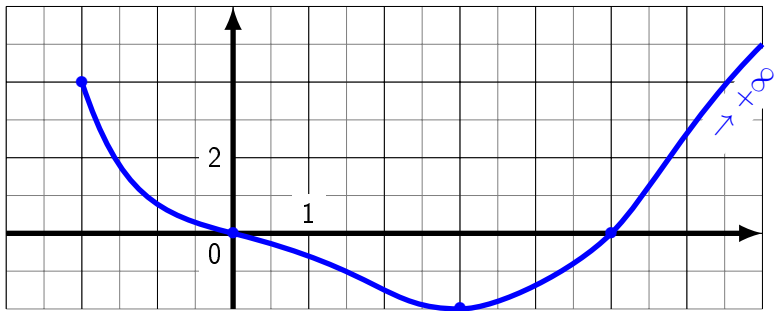
Exercice 7 On a deux boîtes en forme de pavé.

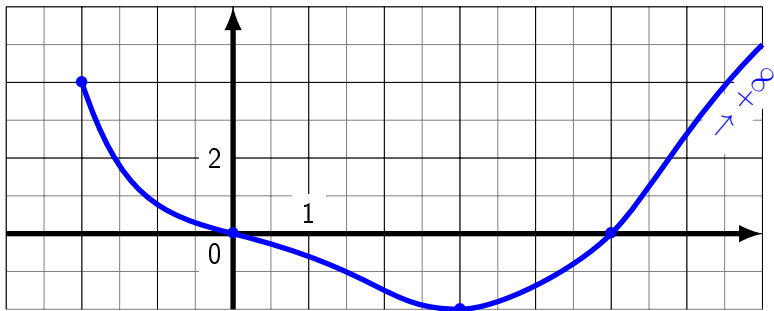
- la première est bleue et ses dimensions sont $8 \times (x + 3) \times x$,
- la seconde est rouge et ses dimensions sont $10 \times (x + 1) \times (x - 1)$.

À partir de quel x la rouge devient-elle plus volumineuse ?

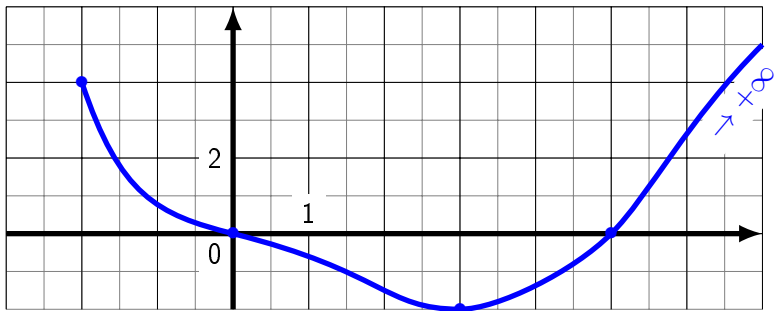
- 35, 36 page 260 : On nous donne des courbes et des questions simples par rapport à ces courbes.
- 37, 38 page 260-261 : Résolution graphique.
- 48 page 261 : Deux fonctions données. On propose de résoudre graphiquement en utilisant la calculatrice.
- 49 à 51 page 262 : Des résolutions graphiques
- 81 page 264 : Résolution graphique avec machine.
- 90 page 265 : Résolution graphique en mode problème.

IV. Signe et variations

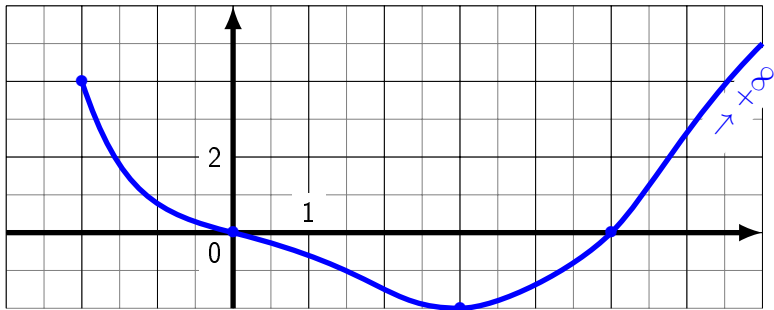




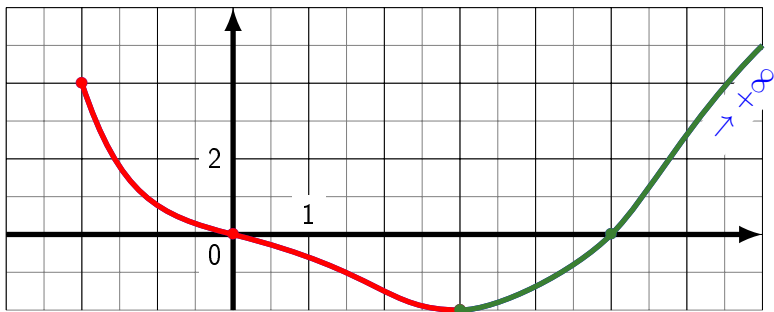
x	-2	0	5	$+\infty$
Signe de $f(x)$		0	0	



x	-2	0	5	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



x	-2	3	$+\infty$
Variations de f			



x	-2	3	$+\infty$
Variations de f	4	-2	$+\infty$

$\searrow$: f **décroissante** ; $\nearrow$: f **croissante** ; **Minimum de f**
 pas de **Maximum** !

Exercice 8

x	$-\infty$	-11	3	9	11	$+20$
Variations de f	$ \begin{array}{cccccc} +\infty & & & 9 & & 19 \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & -5 & & 3 & & \\ & & & & & & 12 \end{array} $					

- Ensemble de définition de f ?
- Maximum de $f(x)$?
- Minimum de $f(x)$?
- Combien $f(x) = 2$ a de solutions ?
- Maximum de $f(x)$ sur $[-11; 20]$?
- Comparez $f(4)$ et $f(5)$.
- Comparez $f(-20)$ et $f(15)$.