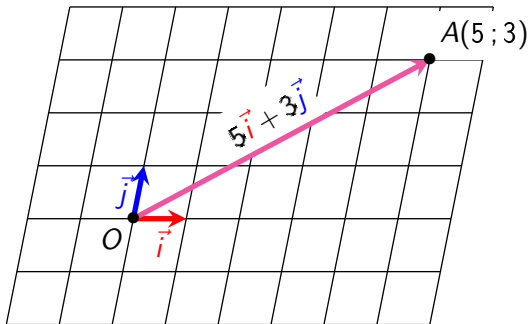




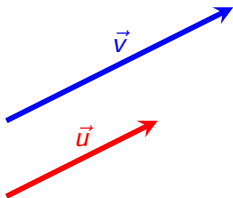
L'illustration résume à peu près tout ce qu'il y a à comprendre.

Vecteurs (2/2) : Coordonnées

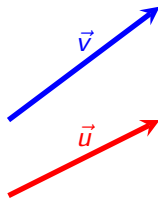
I. Coordonnées

Colinéarité

Si on peut écrire $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, ou dans l'autre sens $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, k étant un réel, alors on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.



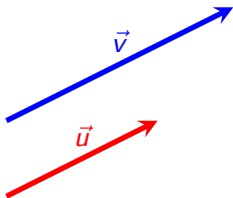
$\vec{v} = 1,5\vec{u}$,
 $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



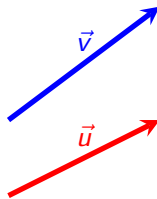
$\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

Colinéarité

Si on peut écrire $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, ou dans l'autre sens $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$, k étant un réel, alors on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.



$\vec{v} = 1,5\vec{u}$,
 $\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



$\vec{v}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.



Quand on dit que deux vecteurs sont colinéaires c'est un peu comme si on disait qu'ils sont parallèles.

Repère du plan

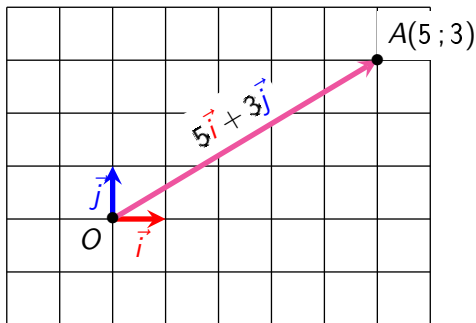
Un repère du plan est donné par un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **non colinéaires**.

On note le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On **admettra** que pour tout point A du plan, on peut trouver une unique paire de réels $(x; y)$ tels que :

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

exemple : $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$



On appelle **coordonnées** de A cette paire $(x; y)$.

$A(5; 3)$ signifie : « A a les coordonnées $(5; 3)$ »

Si on est dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cela veut dire $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

On appelle **coordonnées** de A cette paire $(x; y)$.

$A(5; 3)$ signifie : « A a les coordonnées $(5; 3)$ »

Si on est dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cela veut dire $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

- La coordonnée x est l'**abscisse**,
- La coordonnée y est l'**ordonnée**.

On appelle **coordonnées** de A cette paire $(x; y)$.

$A(5; 3)$ signifie : « A a les coordonnées $(5; 3)$ »

Si on est dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cela veut dire $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

- La coordonnée x est l'**abscisse**,
- La coordonnée y est l'**ordonnée**.

Exercice 1 et **Exercice 2** sur feuille

On appelle **coordonnées** de A cette paire $(x; y)$.

$A(5; 3)$ signifie : « A a les coordonnées $(5; 3)$ »

Si on est dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cela veut dire $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

- La coordonnée x est l'**abscisse**,
- La coordonnée y est l'**ordonnée**.

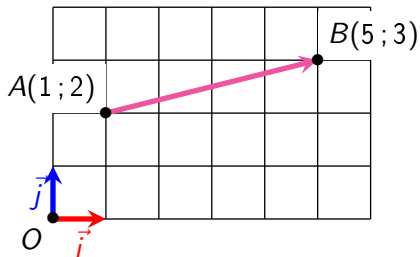
On notera aussi $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ce qui signifie : $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

 On fait exprès de mettre les coordonnées d'un vecteur en colonne pour ne pas les confondre avec les coordonnées d'un point.

II. Règles de calcul

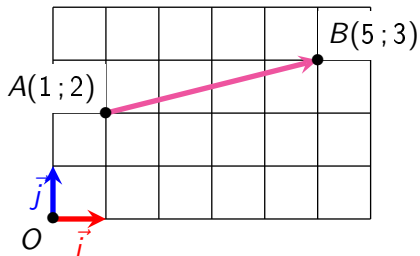
Coordonnées d'un vecteur

Exemple : Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?



Coordonnées d'un vecteur

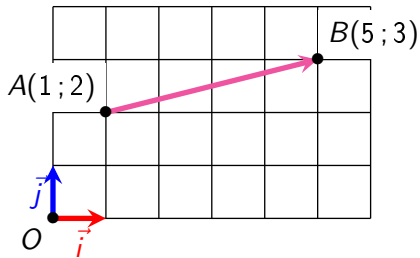
Exemple : Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?



Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Coordonnées d'un vecteur

Exemple : Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?

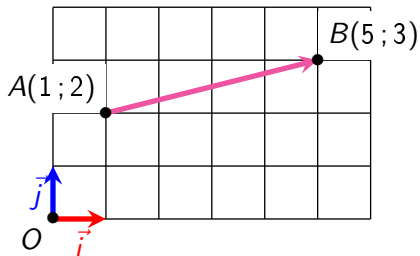


Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exercice 3 et Exercice 4 sur feuille

Coordonnées d'un vecteur

Exemple : Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$?



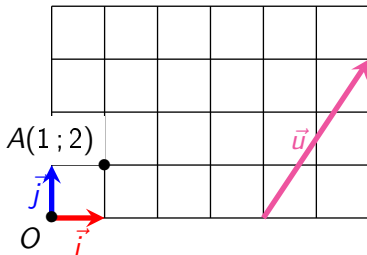
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. Alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



Démonstration !

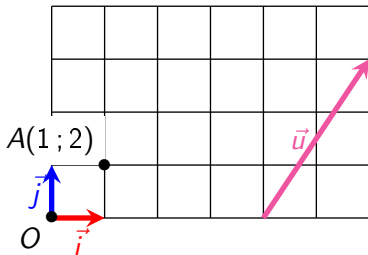
Coordonnées d'un point translaté

Exemple : $A(1; 1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées de A' , image de A par $T_{\vec{u}}$?



Coordonnées d'un point translaté

Exemple : $A(1; 1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées de A' , image de A par $T_{\vec{u}}$?

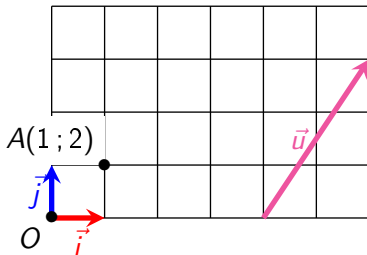


Soient $A(x_A; y_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

L'image A par $T_{\vec{u}}$ a les coordonnées $(x_A + x_{\vec{u}}; y_A + y_{\vec{u}})$

Coordonnées d'un point translaté

Exemple : $A(1; 1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées de A' , image de A par $T_{\vec{u}}$?



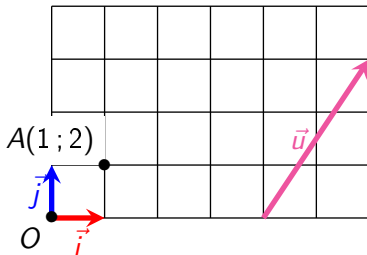
Soient $A(x_A; y_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

L'image A par $T_{\vec{u}}$ a les coordonnées $(x_A + x_{\vec{u}}; y_A + y_{\vec{u}})$

Exercice 5 sur feuille

Coordonnées d'un point translaté

Exemple : $A(1; 1)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées de A' , image de A par $T_{\vec{u}}$?



Soient $A(x_A; y_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

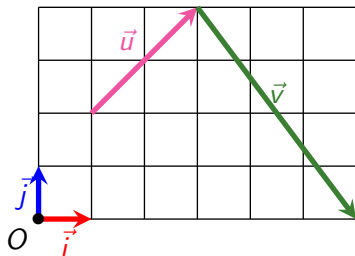
L'image A par $T_{\vec{u}}$ a les coordonnées $(x_A + x_{\vec{u}}; y_A + y_{\vec{u}})$



Démonstration !

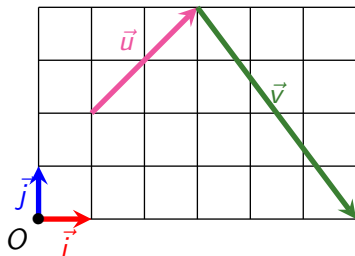
Coordonnées d'une somme de vecteur

Exemple : Quelles sont les coordonnées de la somme $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$?



Coordonnées d'une somme de vecteur

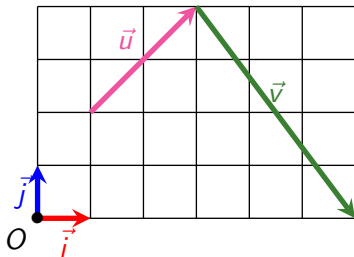
Exemple : Quelles sont les coordonnées de la somme $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$?



$$\text{En général, } \vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$$

Coordonnées d'une somme de vecteur

Exemple : Quelles sont les coordonnées de la somme $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$?

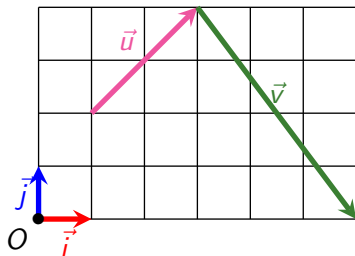


$$\text{En général, } \vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$$

Exercice 6 sur feuille

Coordonnées d'une somme de vecteur

Exemple : Quelles sont les coordonnées de la somme $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$?



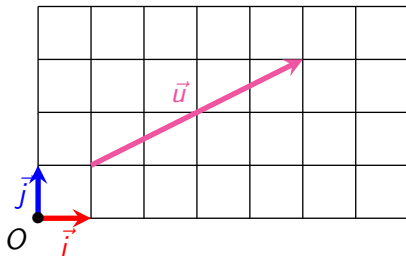
$$\text{En général, } \vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$$



Démonstration !

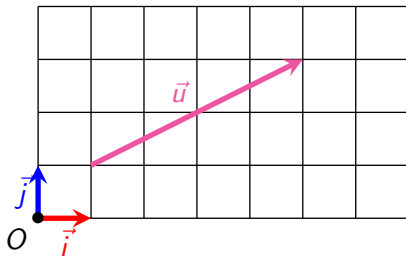
Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Exemple : Quelles sont les coordonnées du produit de $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ par 1,5 ?



Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

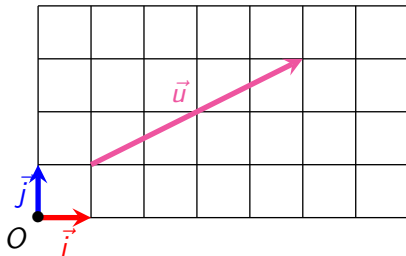
Exemple : Quelles sont les coordonnées du produit de $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ par 1,5 ?



En général, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$, alors $k\vec{u} \begin{pmatrix} k \cdot x_{\vec{u}} \\ k \cdot y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Exemple : Quelles sont les coordonnées du produit de $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ par 1,5 ?

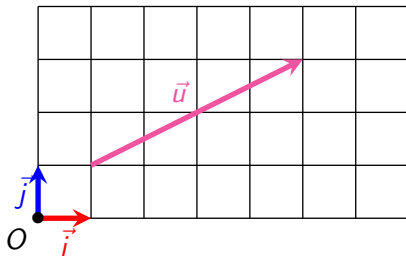


En général, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$, alors $k\vec{u} \begin{pmatrix} k \cdot x_{\vec{u}} \\ k \cdot y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

Exercice 7 sur feuille

Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Exemple : Quelles sont les coordonnées du produit de $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ par 1,5 ?



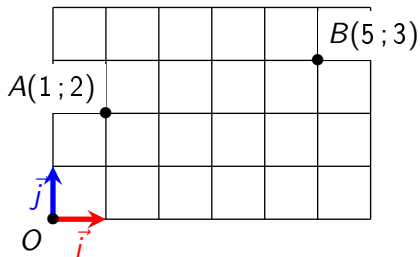
En général, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$, alors $k\vec{u} \begin{pmatrix} k \cdot x_{\vec{u}} \\ k \cdot y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$



Démonstration !

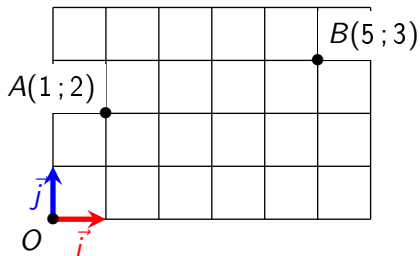
Coordonnées du milieu

Exemple : Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?



Coordonnées du milieu

Exemple : Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?

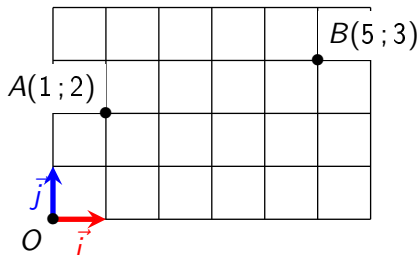


Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Coordonnées du milieu

Exemple : Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?



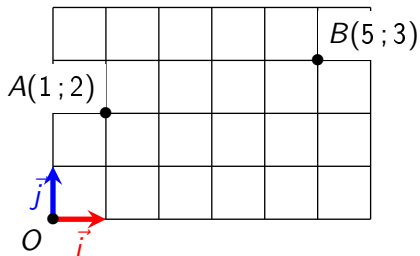
Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Exercice 8 sur feuille

Coordonnées du milieu

Exemple : Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?



Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$,

le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées : $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.



Démonstration !

III. Alignement

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}}$$

Exercice 9 sur la feuille

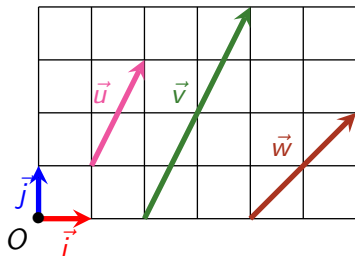
On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}}$$

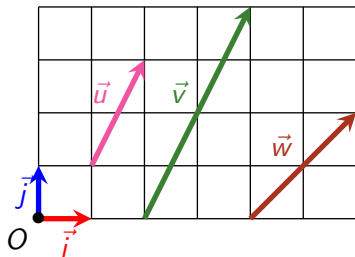
Exercice 9 sur la feuille

 Pas au programme mais $\det(\vec{u}, \vec{v})$ représente l'aire du parallélogramme ayant pour côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$. L'unité d'aire est donnée par l'aire d'un carreau de base du quadrillage.

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$?
Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?

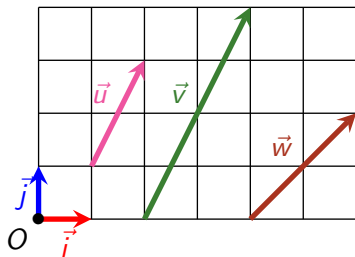


Exemple : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$?
Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?



$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

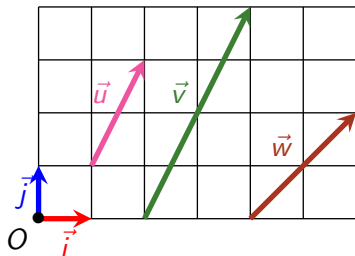
Exemple : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$?
Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?



$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Exercice 10 sur feuille

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$?
Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?



$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$



Démonstration !

$$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{CD}$$

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{AC}$$



On a défini $k \cdot \vec{u}$ comme un vecteur de même direction que $\vec{u}$, donc en quelque sorte parallèle. Ces propriétés découlent donc de la définition.

Exercice 11 sur la feuille.

Exercice 12

- $A(2; 1)$ et $B(4; 3)$.
- $\mathcal{D}$ est la droite formée par les points tels que $x = 7$.

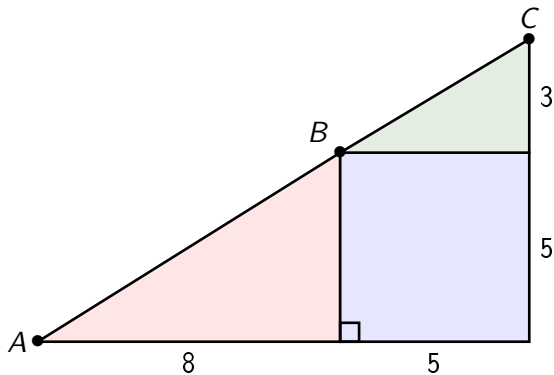
1. Faites une figure.

2. On s'intéresse à $M = \mathcal{D} \cap (AB)$.

2.1 puisque $M \in \mathcal{D}$ que peut-on dire de ses coordonnées ?

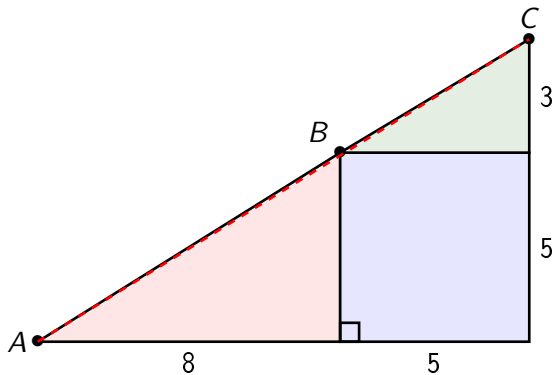
2.2 puisque $M \in (AB)$, donnez une autre condition sur ses coordonnées et concluez.

Exercice 13



Les points A , B et C sont-ils alignés ?

Exercice 13



Les points A , B et C sont-ils alignés ?

Le défaut d'alignement est très faible !

Exercice 14 Soit A, B, C trois points non alignés du plan.

On pose G le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

A' est le milieu de $[BC]$ et B' est le milieu de $[AC]$.

On veut prouver que

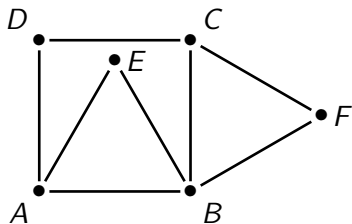
- A, G et A' sont alignés,
- B, G et C' sont alignés.

Pour ce faire, on va utiliser les coordonnées dans le repère : $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

- Donner les coordonnées de tous les points dans ce repère.
- Conclure sur les alignements.

Exercice 15

⚠ Difficile



Sur cette figure, $ABCD$ est un carré ; ABE et BCF sont des triangles équilatéraux.

Montrez que D , E et F sont alignés.

Exercice 16 Théorème de Ménélaüs

91 page 179

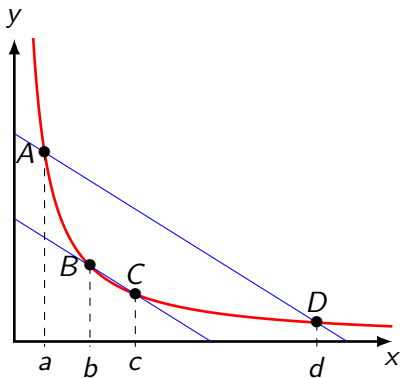
On considère trois points A , B et C non alignés dans un plan. Soient les points M , N et P tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{BN} = y \cdot \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{CP} = z \cdot \overrightarrow{CA}$$

Montrez que M , N et P alignés $\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \cdot \frac{y}{y-1} \cdot \frac{z}{z-1} = 1$

Exercice 17

99 page 180

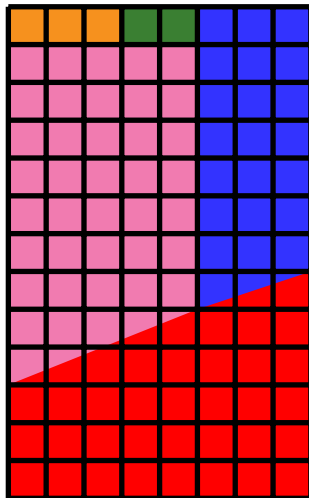
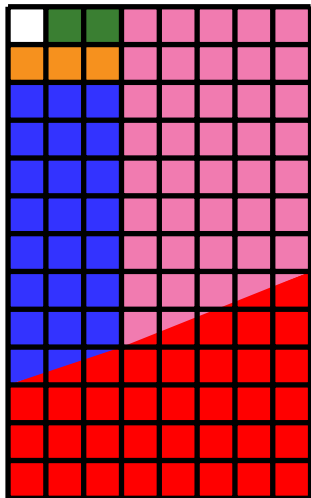


La courbe rouge est l'ensemble des points tels que $y = \frac{1}{x}$, pour $x > 0$.

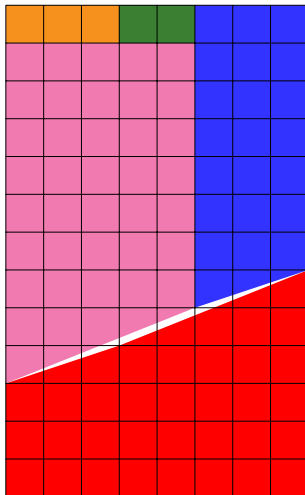
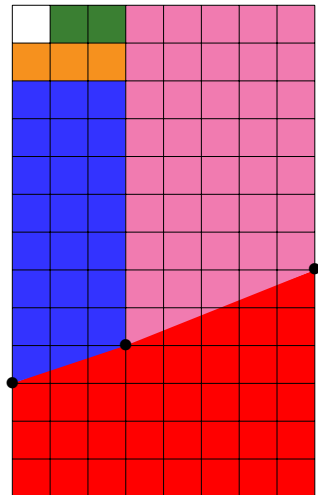
On considère les points A , B , C , D **distincts** deux à deux.

Donnez une condition sur leurs abscisses a , b , c et d pour que $(AD) \parallel (BC)$.

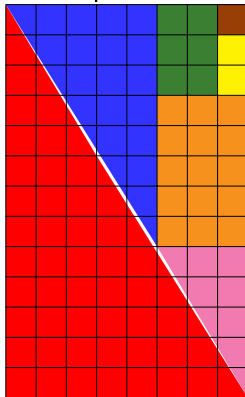
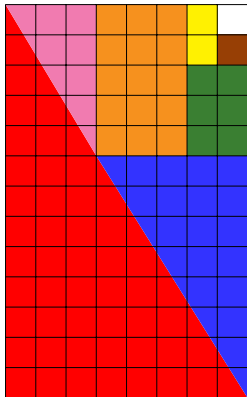
Exercice 18 On découpe une tablette de chocolat, on réarrange les morceaux et... il y a un carré de trop. Où est le problème ?



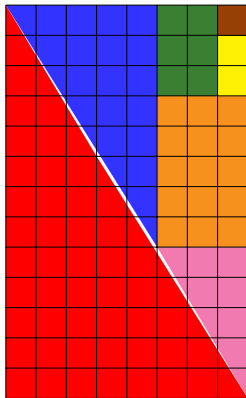
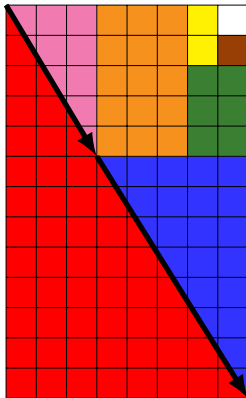
Exercice 18 Les trois points ne sont en vérité pas alignés ce qui empêche de faire glisser les parties rose et bleue comme on prétendait le faire !



Un autre dans le même genre avec un défaut plus difficile à voir à l'œil nu.



Un autre dans le même genre avec un défaut plus difficile à voir à l'œil nu.



Le déterminant des deux vecteurs est de 1. Cela exprime un défaut d'alignement. De plus, ce 1 est exactement égal à l'aire du carré qui « disparaît » !