

# 1 Colinéarité

## Définition colinéarité

Quand on peut trouver  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = a\vec{v}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires**.  $\vec{0}$  est colinéaire avec tous les vecteurs car  $\vec{0} = 0\vec{u}$ .

## Repère du plan – admis

Soient  $O$  un point du plan et deux vecteurs non colinéaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . Pour tout point  $A$  du plan, il existe une unique paire  $(x_A; y_A)$  telle que  $\overrightarrow{OA} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}$ .

$(x_A; y_A)$  sont les coordonnées de  $A$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

De même, pour tout vecteur  $\vec{u}$  du plan, il existe une unique paire  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  telle que  $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ .

On lit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  : « vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $x$  et  $y$  ».

*On place délibérément les coordonnées d'un vecteur en colonne pour ne pas les confondre avec les coordonnées d'un point.*

## Calcul des coordonnées d'un vecteur

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

### démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j}) - (x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j}) \\ &= (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} \end{aligned}$$

## Coordonnées d'un point translaté

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors les coordonnées de  $A'$ , image de  $A$  par  $T_{\vec{u}}$  sont  $(x_A + x; y_A + y)$ .

### démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= \vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} \\ \Rightarrow x_{A'} - x_A &= x \Rightarrow x_{A'} = x_A + x \quad \text{et} \quad \text{Idem pour } y \end{aligned}$$

## Coordonnées de la somme de deux vecteurs

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$

### démonstration

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_{\vec{u}} \cdot \vec{i} + y_{\vec{u}} \cdot \vec{j}) + (x_{\vec{v}} \cdot \vec{i} + y_{\vec{v}} \cdot \vec{j}) = (x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}) \vec{i} + (y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}) \vec{j}$$

**Coordonnées du produit d'un vecteur par un scalaire**

Soient  $k$  un réel et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors  $k\vec{u} \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$

**démonstration**

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}) = (k \cdot x)\vec{i} + (k \cdot y)\vec{j}$$

**Calcul des coordonnées d'un vecteur**

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Alors  $I$ , milieu de  $[AB]$ , a les coordonnées  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

**démonstration**

On sait que  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  donc en coordonnées,

$$x_I - x_A = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \Leftrightarrow x_I = \frac{x_B - x_A}{2} + x_A = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Même chose pour  $y$ .

**Définition : déterminant**

On appelle **déterminant** des vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$  :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} = x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}}$$

**Critère de colinéarité**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

**démonstration**

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} = x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}}$$

- Premier cas :  $x_{\vec{u}} = 0$ . Alors  $x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} = x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}} = 0$  et alors :
  - soit  $x_{\vec{v}} = 0$ . Dans ce cas,  $\vec{u} = y_{\vec{u}} \cdot \vec{j}$  et  $\vec{v} = y_{\vec{v}} \cdot \vec{j}$ . Les deux vecteurs sont colinéaires à  $\vec{j}$  et sont donc colinéaires entre eux.
  - soit  $y_{\vec{u}} = 0$ , alors  $\vec{u} = \vec{0}$  et les deux vecteurs sont colinéaires.
- Deuxième cas :  $y_{\vec{v}} = 0$ . En raisonnement de même, on a là aussi les vecteurs colinéaires.
- Troisième cas :  $x_{\vec{u}} \neq 0$  et  $y_{\vec{v}} \neq 0$   
 Alors  $x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} = x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}} \neq 0$  et donc  $x_{\vec{v}} \neq 0$  et  $y_{\vec{u}} \neq 0$ .

$$x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} = x_{\vec{v}} \cdot y_{\vec{u}} \Leftrightarrow \frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = k \in \mathbb{R}$$

On a donc  $x_{\vec{u}} = k \cdot x_{\vec{v}}$  et  $y_{\vec{u}} = k \cdot y_{\vec{v}}$  et donc  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

**Propriété**

$A, B$  et  $C$  alignés  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  colinéaires

$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  colinéaire à  $\overrightarrow{CD}$

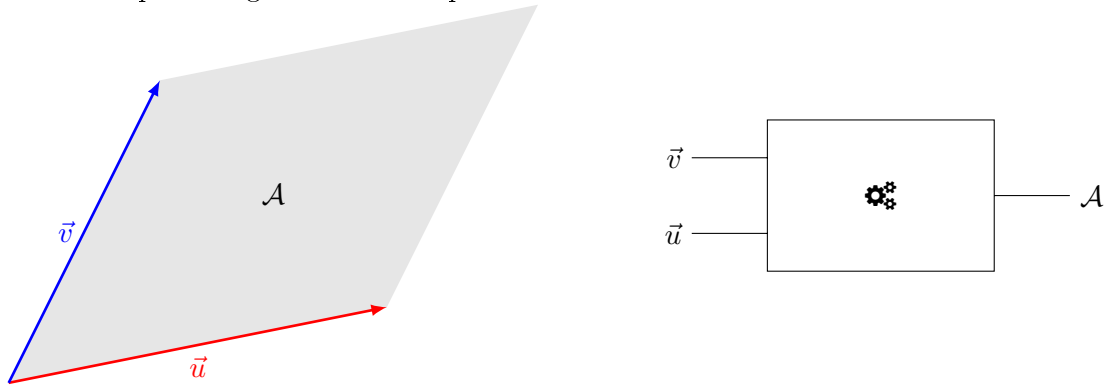
**démonstration**

Nous avons défini deux vecteurs colinéaires comme deux vecteurs ayant la même direction. Si  $\overrightarrow{AB}$  a la même direction que  $\overrightarrow{CD}$ , cela veut précisément dire que  $(AB) \parallel (CD)$ . On voit donc que la seconde propriété découle de la définition.

Dire que  $A, B, C$  alignés revient à dire que  $(AB) = (AC)$  et donc  $(AB) \parallel (AC)$ . On voit que la première propriété découle de la seconde.

## 2 Aire et déterminant

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. Je définis une fonction  $\mathcal{A}$  qui reçoit les deux vecteurs et qui renvoie l'aire du parallélogramme définie par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .



On choisit de compter l'aire positivement si  $\langle \vec{u}; \vec{v} \rangle$  est dans le sens trigonométrique (anti-horaire) et négativement sinon.

Voyons les propriétés que devra avoir la fonction :

**P1 :**  $\mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) = -\mathcal{A}(\vec{v}; \vec{u})$ , en effet on a dit que l'on comptait l'aire en + ou en - selon l'ordre des vecteurs.

**P2 :**  $\mathcal{A}(\vec{u}; \vec{u}) = 0$ . En effet, on a dans ce cas un parallélogramme aplati d'aire nulle.

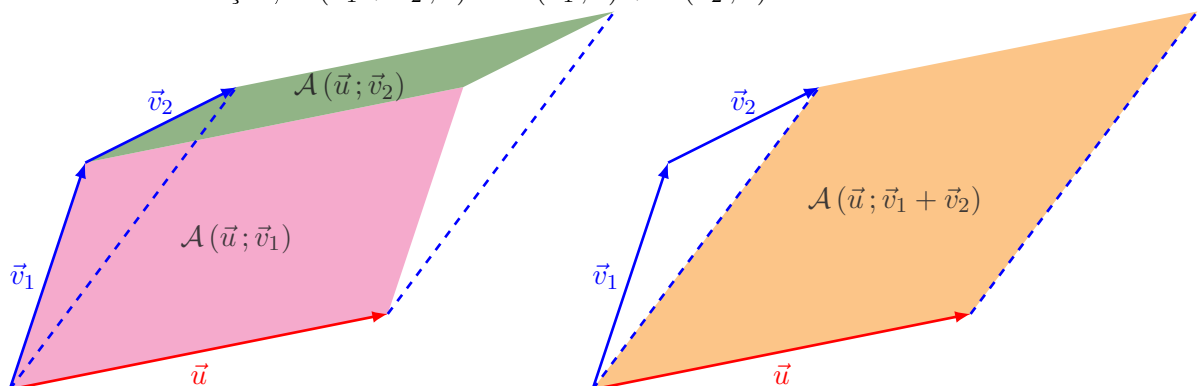
**P3 :**  $\mathcal{A}(k \cdot \vec{u}; \vec{v}) = k \cdot \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v})$ . En effet, on voit que si la longueur du vecteur  $\vec{u}$  est multipliée par exemple par 2, alors l'aire est multipliée de la même façon.

Si l'aire est multipliée par  $-2$  par exemple, cela renverse le sens de  $\vec{u}$  si bien que l'angle entre les deux vecteurs change de sens, on a donc bien un changement de signe de l'aire.

**P4 :** De la même façon,  $\mathcal{A}(\vec{u}; m \cdot \vec{v}) = m \cdot \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v})$ .

**P5 :** Sur la figure ci-dessous, on voit que  $\mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}_1) + \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}_2)$

**P6 :** De la même façon,  $\mathcal{A}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2; \vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{u}_1; \vec{v}) + \mathcal{A}(\vec{u}_2; \vec{v})$



Fort de ces propriétés, on peut calculer l'aire d'un parallélogramme en fonction de l'aire  $\mathcal{A}(\vec{i}; \vec{j})$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= \mathcal{A}(x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j}; x_{\vec{v}}\vec{i} + y_{\vec{v}}\vec{j}) \\
 (P5) \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= \mathcal{A}(x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j}; x_{\vec{v}}\vec{i}) + \mathcal{A}(x_{\vec{u}}\vec{i} + y_{\vec{u}}\vec{j}; y_{\vec{v}}\vec{j}) \\
 (P6) \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= \mathcal{A}(x_{\vec{u}}\vec{i}; x_{\vec{v}}\vec{i}) + \mathcal{A}(y_{\vec{u}}\vec{j}; x_{\vec{v}}\vec{i}) + \mathcal{A}(x_{\vec{u}}\vec{i}; y_{\vec{v}}\vec{j}) + \mathcal{A}(y_{\vec{u}}\vec{j}; y_{\vec{v}}\vec{j}) \\
 (P3) \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= x_{\vec{u}} \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; x_{\vec{v}}\vec{i}) + y_{\vec{u}} \cdot \mathcal{A}(\vec{j}; x_{\vec{v}}\vec{i}) + x_{\vec{u}} \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; y_{\vec{v}}\vec{j}) + y_{\vec{u}} \cdot \mathcal{A}(\vec{j}; y_{\vec{v}}\vec{j}) \\
 (P4) \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= x_{\vec{u}} \cdot x_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; \vec{i}) + x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; \vec{j}) + y_{\vec{u}} \cdot x_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{j}; \vec{i}) + y_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{j}; \vec{j}) \\
 (P2) \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= 0 + x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; \vec{j}) + y_{\vec{u}} \cdot x_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{j}; \vec{i}) + 0 \\
 (P1) \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= x_{\vec{u}} \cdot y_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; \vec{j}) - y_{\vec{u}} \cdot x_{\vec{v}} \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; \vec{j}) \\
 \mathcal{A}(\vec{u}; \vec{v}) &= \det(\vec{u}; \vec{v}) \cdot \mathcal{A}(\vec{i}; \vec{j})
 \end{aligned}$$

On voit donc que le déterminant donne l'aire du parallélogramme exprimé en **unité d'aire**. L'unité d'aire est l'aire du parallélogramme porté par  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  (l'aire d'un carreau sur notre quadrillage).

La fonction aire que nous avons définie reprend le principe du **produit vectoriel**. Il s'agit d'un produit que l'on note parfois  $\wedge$  et on pose (tout comme on vient de le faire) :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $(a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2) \wedge \vec{v} = a \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{v}) + b \cdot (\vec{u}_2 \wedge \vec{v})$

Ces deux règles suffisent à obtenir les autres.

On peut extrapoler ces règles pour des dimensions plus élevées, par exemple en dimension 3. Cela donne des règles de calcul extrêmement efficaces pour calculer des surfaces en 3D ce qui est très utile par exemple pour faire des calculs dans les jeux vidéos.