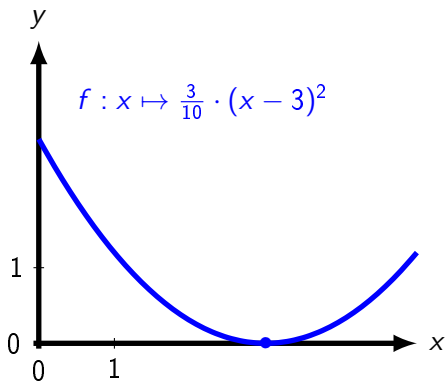




Fonction carré

$$l. x \mapsto x^2$$

On appelle **fonction carré** la fonction $x \mapsto x^2$ qui est définie sur

On appelle **fonction carré** la fonction $x \mapsto x^2$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 Tracer la courbe de $x \mapsto x^2$ pour $-2 \leq x \leq 2$.

On prendra 2 carreau comme unité. Pour le tracer, on peut anticiper que $0 \leq y \leq 4$.

Exercice 2 En utilisant la représentation graphique précédente, donnez des encadrements :

a) $x \in [0 ; 2] \Rightarrow x^2 \in \dots$

b) $x \in [-2 ; 1[\Rightarrow x^2 \in \dots$

Exercice 3 Montrez que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$
- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Exercice 3 Montrez que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$
- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tableau de signe

Exercice 3 Montrez que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$
- $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x^2	$+$	0	$+$

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto x^2$.

- Justifiez que $f(-x) = f(x)$.
- Montrez que $0 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- Montrez que pour tout $M \in \mathbb{R}$, on peut toujours trouver x tel que $f(x) > M$.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto x^2$.

- Justifiez que $f(-x) = f(x)$.
- Montrez que $0 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- Montrez que pour tout $M \in \mathbb{R}$, on peut toujours trouver x tel que $f(x) > M$.

Variations

$f(x) = f(-x)$: on dit que la fonction est **paire**. Sur la représentation graphique, cela se traduit par une symétrie selon l'axe Oy (cf. *courbe exo 1*)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

Exercice 4 Soit $f : x \mapsto x^2$.

- Justifiez que $f(-x) = f(x)$.
- Montrez que $0 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
- Montrez que pour tout $M \in \mathbb{R}$, on peut toujours trouver x tel que $f(x) > M$.

Variations

$f(x) = f(-x)$: on dit que la fonction est **paire**. Sur la représentation graphique, cela se traduit par une symétrie selon l'axe Oy (cf. *courbe exo 1*)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	0	$+\infty$

II. $\sqrt{A}$

Exercice 5 En utilisant le tableau de variation de $x \mapsto x^2$, dites combien $x^2 = A$ a de solutions dans $\mathbb{R}$

a) si $A < 0$

b) si $A = 0$

c) si $A > 0$

Exercice 5 En utilisant le tableau de variation de $x \mapsto x^2$, dites combien $x^2 = A$ a de solutions dans $\mathbb{R}$

a) si $A < 0$

b) si $A = 0$

c) si $A > 0$

Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, on appelle **racine carrée** de A l'**unique solution positive** de $x^2 = A$. On note $\sqrt{A}$ cette solution.

Exercice 5 En utilisant le tableau de variation de $x \mapsto x^2$, dites combien $x^2 = A$ a de solutions dans $\mathbb{R}$

- a) si $A < 0$
- b) si $A = 0$
- c) si $A > 0$

Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, on appelle **racine carrée** de A l'**unique solution positive** de $x^2 = A$. On note $\sqrt{A}$ cette solution.

- Pour $A < 0$: $x^2 = A$ n'a pas de solution
- Pour $A = 0$: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Pour $A > 0$: $x^2 = A \Leftrightarrow x = \sqrt{A}$ OU $x = -\sqrt{A}$

Exercice 6 Résoudre

a) $3x^2 + 2 = 45$

b) $x^2 + 51 = 25$

c) $2(x^2 + 17) = 34$

III. Fonctions du second degré

On appelle ainsi les fonctions qui peuvent s'exprimer

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

où a , b , c ne dépendent pas de x et $a \neq 0$.

Par exemple : $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$

On appelle ainsi les fonctions qui peuvent s'exprimer

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

où a , b , c ne dépendent pas de x et $a \neq 0$.

Par exemple : $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$

Exercice 7 Déterminer a , b , c dans les cas suivants.

a) $f(x) = 2x^2 - x + 5$

c) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 8$

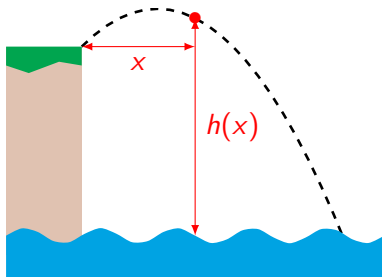
b) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = -x^2 + x$

Exercice 8

Un plongeur saute dans la mer depuis un surplomb. Sa trajectoire est décrite par l'ensemble des points vérifiant $h(x) = -x^2 + 2x + 5$ (voir figure).

On souhaite connaître la distance x_0 du point d'impact du plongeur dans l'eau.



- Faites une résolution graphique de la question.
- Montrez que $h(x) = -(x - 1)^2 + 6$
- Donnez l'unique solution valide de $h(x) = 0$. Conclure.

Exercice 9

Dans tous ces cas, visualisez la courbe représentative de f , déterminez le minimum ou maximum de $f(x)$ et la valeur de x où il est atteint. Vérifiez la factorisation proposée.

a) $f(x) = 3x^2 + 12x + 17 = 3(x + 2)^2 + 5$

b) $f(x) = x^2 - 5x - 2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 2 - \frac{25}{4}$

c) $f(x) = 10x^2 - 70x + 50 = 10(x - 3,5)^2 - 72,5$

Exercice 9

Dans tous ces cas, visualisez la courbe représentative de f , déterminez le minimum ou maximum de $f(x)$ et la valeur de x où il est atteint. Vérifiez la factorisation proposée.

a) $f(x) = 3x^2 + 12x + 17 = 3(x + 2)^2 + 5$

b) $f(x) = x^2 - 5x - 2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 2 - \frac{25}{4}$

c) $f(x) = 10x^2 - 70x + 50 = 10(x - 3,5)^2 - 72,5$

Le courbe d'une fonction du second degré est toujours une parabole :

- dans le sens $\cup$ si $a > 0$,
- dans le sens $\cap$ si $a < 0$.

Exercice 10 a, b, c sont des réels fixés quelconques. $a > 0$.

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

a) Montrez que

$$f(x) = a \cdot \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

b) Justifiez que $f(x)$ est minimum en $-\frac{b}{2a}$

c) Qu'est ce qui change si $a < 0$?

Exercice 10 a, b, c sont des réels fixés quelconques. $a > 0$.

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

a) Montrez que

$$f(x) = a \cdot \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

b) Justifiez que $f(x)$ est minimum en $-\frac{b}{2a}$

c) Qu'est ce qui change si $a < 0$?

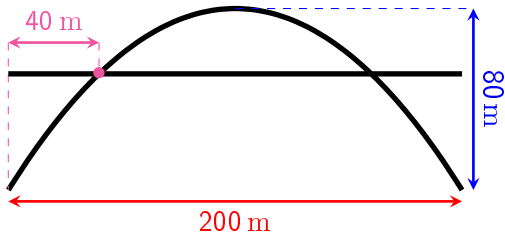
$f(x) = ax^2 + bx + c$ atteint toujours son ^{$a > 0$} minimum / ^{$a < 0$} maximum en $x = -\frac{b}{2a}$.

Exercice 11

- a) Utilisez les propriétés précédentes pour donner directement le tableau de variation de $f : x \mapsto -3x^2 + 5x + 29$.
- b) Si $1 \leq x < 10$, comment peut-on encadrer $f(x)$?

Exercice 12 Le pont

Un pont est soutenu par un arc parabolique d'une portée de 200 m et d'une hauteur de 80 m . Le pont rencontre l'arc à 40 m du pied gauche de l'arc. Quelle est la hauteur du pont ?



Exercice 13 Donnez la valeur exacte de ϕ sachant que

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$



On appelle cette écriture une **fraction continue**.