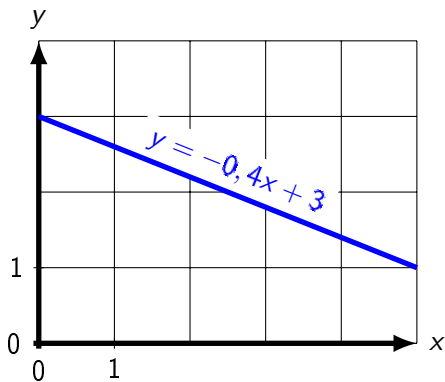




Équation de droite dans un repère

- $\mathcal{D}$  désigne toujours une **droite**.
- On travaille dans **le plan**.
- Les coordonnées sont dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

## I. Vecteur directeur

On peut trouver sur  $\mathcal{D}$  deux points **distincts**  $A$  et  $B$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$   
 $\Leftrightarrow \vec{u}$  est **un vecteur directeur** de  $\mathcal{D}$ .

## II. Équation cartésienne de droite

**Exercice 1**  $A(2; 4)$  et  $B(5; 2)$ .

- a) Justifiez que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  est vecteur directeur de  $\mathcal{D} = (AB)$ .
- b) Donnez les coordonnées de  $\vec{u}$ .
- c) Soit  $M(x; y)$  un point quelconque de  $(AB)$ .  
Donnez les coordonnées de  $\overrightarrow{AM}$
- d) Énoncez une condition sous forme d'une égalité pour que  $M \in (AB)$ .
- e) Dédisez-en une équation liant  $x$  et  $y$ .

*Cette équation est appelée équation cartésienne de  $(AB)$*

## 1) Définition

Une droite  $\mathcal{D}$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  une équation dite **cartésienne** de forme :

$$\mathcal{D}: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$(a; b) \neq (0; 0)$$

càd : Les coordonnées de tout point  $M(x; y) \in \mathcal{D}$  vérifient l'équation.



Démonstration !

## 1) Définition

Une droite  $\mathcal{D}$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  une équation dite **cartésienne** de forme :

$$\mathcal{D} : a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$(a; b) \neq (0; 0)$$

càd : Les coordonnées de tout point  $M(x; y) \in \mathcal{D}$  vérifient l'équation.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  est **un** vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .



Démonstration !

**Méthode :** Trouver l'équation de  $(AB)$ , les deux coordonnées des points étant données.

*Il suffit de suivre ce qui a été fait dans l'exercice 1.*

- i) Calculer les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$ ,
- ii) exprimer les coordonnées de  $\overrightarrow{AM}$  avec  $M(x; y) \in (AB)$ ,
- iii) poser  $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

Ce qui revient à faire :

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0$$

2)  $M \in \mathcal{D}$  ?

$$\mathcal{D} : 3x - 15y + 54 = 0$$

$$A(2; 4) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow$$

$$B(-2; 3) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow$$

2)  $M \in \mathcal{D}$ ?

$$\mathcal{D} : 3x - 15y + 54 = 0$$

$$A(2; 4) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 3 \times 2 - 15 \times 4 + 54 = 0$$
$$\Leftrightarrow$$

$$B(-2; 3) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow$$

2)  $M \in \mathcal{D}$  ?

$$\mathcal{D} : 3x - 15y + 54 = 0$$

$$\begin{aligned} A(2; 4) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow 3 \times 2 - 15 \times 4 + 54 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $A \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} B(-2; 3) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

2)  $M \in \mathcal{D}$ ?

$$\mathcal{D} : 3x - 15y + 54 = 0$$

$$\begin{aligned} A(2; 4) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow 3 \times 2 - 15 \times 4 + 54 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $A \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} B(-2; 3) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

2)  $M \in \mathcal{D}$ ?

$$\mathcal{D} : 3x - 15y + 54 = 0$$

$$\begin{aligned} A(2; 4) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow 3 \times 2 - 15 \times 4 + 54 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $A \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} B(-2; 3) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow 3 \times (-2) - 15 \times 3 + 54 = 0 \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

2)  $M \in \mathcal{D}$ ?

$$\mathcal{D} : 3x - 15y + 54 = 0$$

$$\begin{aligned} A(2; 4) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow 3 \times 2 - 15 \times 4 + 54 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $A \in \mathcal{D}$

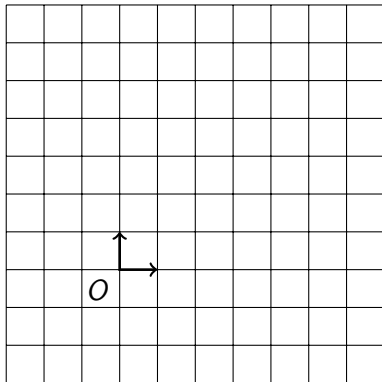
$$\begin{aligned} B(-2; 3) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow 3 \times (-2) - 15 \times 3 + 54 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3 = 0 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $B \notin \mathcal{D}$

### 3) Tracer une droite

$$\mathcal{D}: 2x + 3y - 9 = 0$$

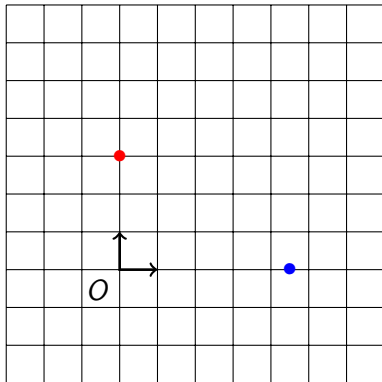
|   |   |   |  |
|---|---|---|--|
| x | 0 |   |  |
| y |   | 0 |  |



### 3) Tracer une droite

$$\mathcal{D}: 2x + 3y - 9 = 0$$

|   |   |     |
|---|---|-----|
| x | 0 | 4,5 |
| y | 3 | 0   |



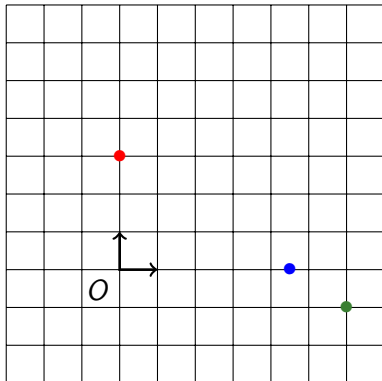
### 3) Tracer une droite

$$\mathcal{D}: 2x + 3y - 9 = 0$$

|   |   |     |    |
|---|---|-----|----|
| x | 0 | 4,5 | 6  |
| y | 3 | 0   | -1 |



Essayer de deviner les points qui tombent justes.



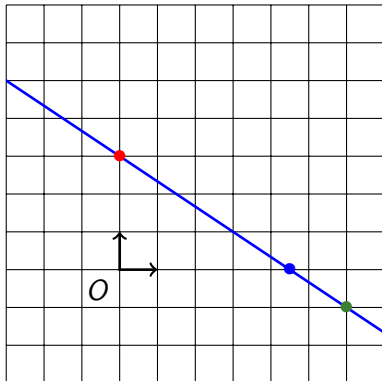
### 3) Tracer une droite

$$\mathcal{D}: 2x + 3y - 9 = 0$$

|   |   |     |    |
|---|---|-----|----|
| x | 0 | 4,5 | 6  |
| y | 3 | 0   | -1 |



Essayer de deviner les points qui tombent justes.



#### 4) Droites // ou pas

exemple : ces droites sont-elles parallèles ?

$$\mathcal{D}_1 : 2x - 3y + 12 = 0$$

$$\mathcal{D}_2 : -4x + 7y + 14 = 0$$

#### 4) Droites // ou pas

exemple : ces droites sont-elles parallèles ?

$$\mathcal{D}_1 : 2x - 3y + 12 = 0$$

$$\mathcal{D}_2 : -4x + 7y + 14 = 0$$

#### Méthode :

On peut calculer le déterminant des coeffs  $x$  et  $y$  :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 7 - (-4) \times (-3) = 2 \neq 0$$

Ces deux droites sont donc **non parallèles**.



**Démo** : évident avec colinéarité vecteurs directeurs

## 5) Système

Trouver  $x$  et  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ -4x + 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

## 5) Système

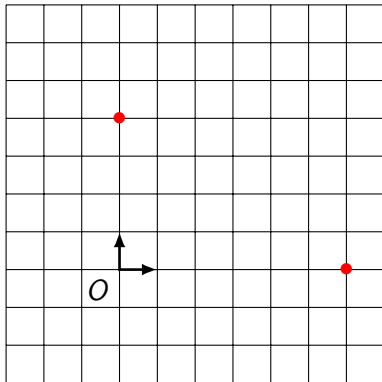
Trouver  $x$  et  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ -4x + 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

graphiquement :

$$2x + 3y - 12 = 0$$

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $x$ | $0$ | $6$ |
| $y$ | $4$ | $0$ |



## 5) Système

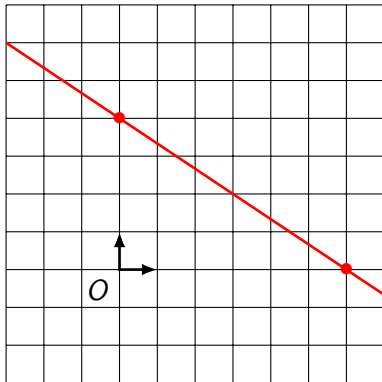
Trouver  $x$  et  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ -4x + 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

graphiquement :

$$2x + 3y - 12 = 0$$

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $x$ | $0$ | $6$ |
| $y$ | $4$ | $0$ |



## 5) Système

Trouver  $x$  et  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ -4x + 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

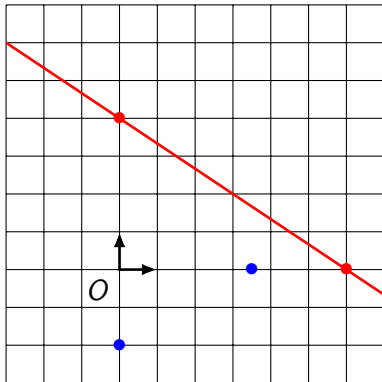
graphiquement :

$$2x + 3y - 12 = 0$$

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | $ $ | $0$ | $ $ | $6$ |
| $y$ | $ $ | $4$ | $ $ | $0$ |

$$2x + 3y - 12 = 0$$

|     |     |      |     |       |
|-----|-----|------|-----|-------|
| $x$ | $ $ | $0$  | $ $ | $3,5$ |
| $y$ | $ $ | $-2$ | $ $ | $0$   |



## 5) Système

Trouver  $x$  et  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ -4x + 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

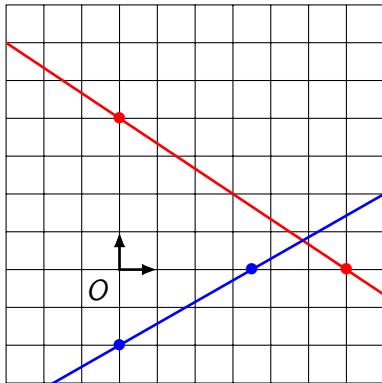
graphiquement :

$$2x + 3y - 12 = 0$$

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $x$ | $0$ | $6$ |
| $y$ | $4$ | $0$ |

$$-4x + 7y + 14 = 0$$

|     |      |       |
|-----|------|-------|
| $x$ | $0$  | $3,5$ |
| $y$ | $-2$ | $0$   |



## 5) Système

Trouver  $x$  et  $y$  vérifiant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 \\ -4x + 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

graphiquement :

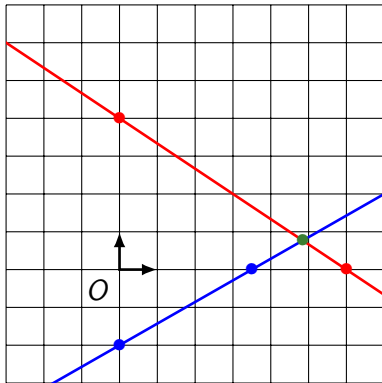
$$2x + 3y - 12 = 0$$

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $x$ | $0$ | $6$ |
| $y$ | $4$ | $0$ |

$$-4x + 7y + 14 = 0$$

|     |      |       |
|-----|------|-------|
| $x$ | $0$  | $3,5$ |
| $y$ | $-2$ | $0$   |

intersection en  $\approx (4,8; 0,8)$



$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 & (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Algébriquement



Étiqueter les équations aide à suivre ce que l'on fait.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 & (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Algébriquement



Il faut produire une équation avec une seule inconnue.

Je **choisis** de faire disparaître  $x$ . J'égalise le nombre de  $x$  en haut et en bas.

$$\begin{cases} 4x + 6y - 24 = 0 & 2 \times (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Somme (ou différence)

$$2 \times (1) + (2) : \quad 13y - 10 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 & (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Algébriquement

Je **choisis** de faire disparaître  $x$ . J'égalise le nombre de  $x$  en haut et en bas.

$$\begin{cases} 4x + 6y - 24 = 0 & 2 \times (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Somme (ou différence)

$$2 \times (1) + (2) : \quad 13y - 10 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{10}{13} \approx 0,769$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 & (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Algébriquement

Je **choisis** de faire disparaître  $x$ . J'égalise le nombre de  $x$  en haut et en bas.

$$\begin{cases} 4x + 6y - 24 = 0 & 2 \times (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Somme (ou différence)

$$2 \times (1) + (2) : \quad 13y - 10 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{10}{13} \approx 0,769$$

Remplacer dans (1) :

$$2x + 3 \times \frac{10}{13} - 12 = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 12 = 0 & (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Algébriquement

Je **choisis** de faire disparaître  $x$ . J'égalise le nombre de  $x$  en haut et en bas.

$$\begin{cases} 4x + 6y - 24 = 0 & 2 \times (1) \\ -4x + 7y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Somme (ou différence)

$$2 \times (1) + (2) : \quad 13y - 10 = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{10}{13} \approx 0,769$$

Remplacer dans (1) :

$$2x + 3 \times \frac{10}{13} - 12 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{63}{13} \approx 4,846$$

### III. Équation réduite

1)  $b = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D} // (Oy)$

$$\mathcal{D} : a \cdot x + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$$

vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ , colinéaire à  $\vec{j}$  donc  $\mathcal{D} // (Oy)$  (axe y)

**Équation réduite si  $\mathcal{D}$  parallèle axe y :**

$$x = k$$

## 2) $b \neq 0$

$$\mathcal{D}: a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}$$

Équation réduite si  $\mathcal{D}$  non parallèle axe  $y$  :

$$y = m \cdot x + p$$

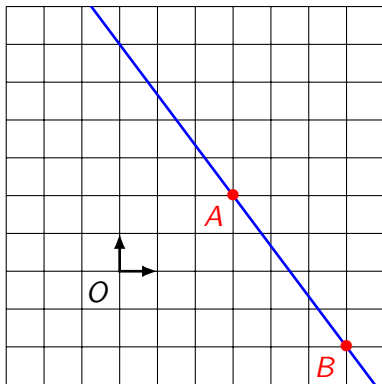
$m$  est le **coefficient directeur** et  $p$  est l'**ordonnée à l'origine**.

$m$  donne la **pente**, càd l'inclinaison de la droite.

### 3) Calculer l'équation

On sait  $y = m \cdot x + p$

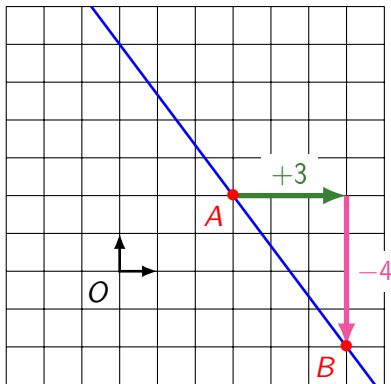
•  $m =$



### 3) Calculer l'équation

On sait  $y = m \cdot x + p$

$$\bullet m = \frac{-4}{+3}$$

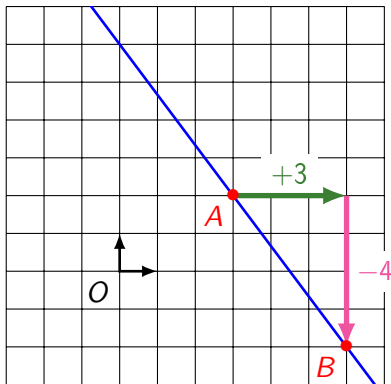


### 3) Calculer l'équation

On sait  $y = m \cdot x + p$

- $m = \frac{-4}{+3}$
- prendre les coordonnées de A, m, et remplacer dans eq. :

$$2 = -\frac{4}{3} \cdot 3 + p$$



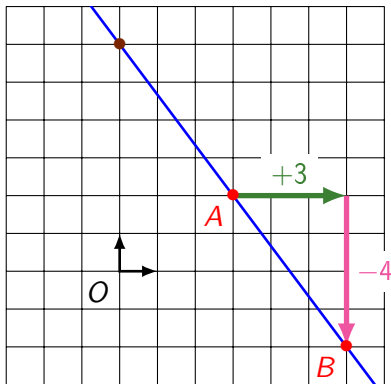
### 3) Calculer l'équation

On sait  $y = m \cdot x + p$

- $m = \frac{-4}{+3}$
- prendre les coordonnées de A,  $m$ , et remplacer dans eq. :

$$2 = -\frac{4}{3} \cdot 3 + p$$

On obtient  $p = 6$



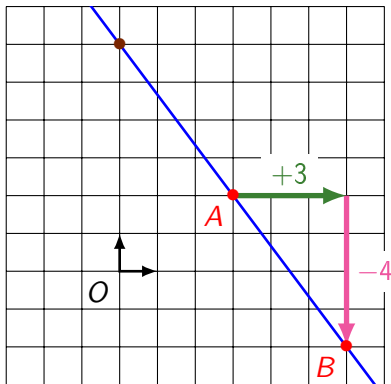
### 3) Calculer l'équation

On sait  $y = m \cdot x + p$

- $m = \frac{-4}{+3}$
- prendre les coordonnées de A,  $m$ , et remplacer dans eq. :

$$2 = -\frac{4}{3} \cdot 3 + p$$

On obtient  $p = 6$



### 3) Calculer l'équation

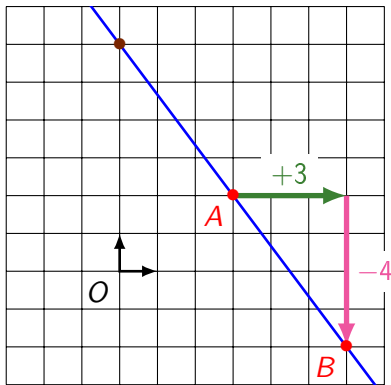
On sait  $y = m \cdot x + p$

- $m = \frac{-4}{+3}$
- prendre les coordonnées de A, m, et remplacer dans eq. :

$$2 = -\frac{4}{3} \cdot 3 + p$$

On obtient  $p = 6$

$$\mathcal{D} : y = -\frac{4}{3}x + 6$$



Démo : trouver l'équation cartésienne comme précédemment et transformer en réduite.

Équation de  $(AB)$  :

- si  $x_B = x_A$  :  $(AB) : x = x_A$ .
- sinon :  $(AB) : y = m \cdot x + p$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et  $p$  déduit en remplaçant dans  $y = m \cdot x + p$ .

Équation de  $(AB)$  :

- si  $x_B = x_A$  :  $(AB) : x = x_A$ .
- sinon :  $(AB) : y = m \cdot x + p$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et  $p$  déduit en remplaçant dans  $y = m \cdot x + p$ .

**Exemple :**  $A(-3;7)$  et  $B(9;2)$

$A \quad ( \quad -3 \quad ; \quad 7 \quad )$

$B \quad ( \quad 9 \quad ; \quad 2 \quad )$

Équation de  $(AB)$  :

- si  $x_B = x_A$  :  $(AB) : x = x_A$ .
- sinon :  $(AB) : y = m \cdot x + p$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et  $p$  déduit en remplaçant dans  $y = m \cdot x + p$ .

**Exemple :**  $A(-3; 7)$  et  $B(9; 2)$

$x_A \neq x_B$ , on calcule  $m = \frac{-5}{+12}$

$$A \quad ( \quad -3 \quad ; \quad 7 \quad )$$

$$+12 \downarrow \quad \quad \downarrow -5$$

$$B \quad ( \quad 9 \quad ; \quad 2 \quad )$$

Équation de  $(AB)$  :

- si  $x_B = x_A$  :  $(AB) : x = x_A$ .
- sinon :  $(AB) : y = m \cdot x + p$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et  $p$  déduit en remplaçant dans  $y = m \cdot x + p$ .

**Exemple :**  $A(-3; 7)$  et  $B(9; 2)$

$x_A \neq x_B$ , on calcule  $m = \frac{-5}{+12}$

$$7 = -\frac{5}{12} \cdot (-3) + p \Rightarrow p = \frac{23}{4}$$

$A \quad ( \quad -3 \quad ; \quad 7 \quad )$

$+12 \downarrow$        $\downarrow -5$

$B \quad ( \quad 9 \quad ; \quad 2 \quad )$

Équation de  $(AB)$  :

- si  $x_B = x_A$  :  $(AB) : x = x_A$ .
- sinon :  $(AB) : y = m \cdot x + p$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

et  $p$  déduit en remplaçant dans  $y = m \cdot x + p$ .

**Exemple :**  $A(-3; 7)$  et  $B(9; 2)$

$x_A \neq x_B$ , on calcule  $m = \frac{-5}{+12}$

$$7 = -\frac{5}{12} \cdot (-3) + p \Rightarrow p = \frac{23}{4}$$

$$(AB) : y = -\frac{5}{12}x + \frac{23}{4}$$

$$A \quad ( \quad -3 \quad ; \quad 7 \quad )$$

$$+12 \downarrow \quad \quad \downarrow -5$$

$$B \quad ( \quad 9 \quad ; \quad 2 \quad )$$

#### 4) Droites // ou pas



Les droites d'équation  $x = k$  sont évidemment parallèles entre elles et non parallèles aux droites d'équation  $y = m \cdot x + p$

$\mathcal{D}_1 : y = m_1 \cdot x + p_1$  et  $\mathcal{D}_2 : y = m_2 \cdot x + p_2$   
sont parallèles ssi  $m_1 = m_2$