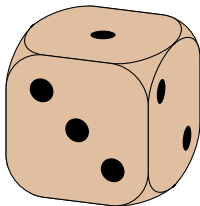
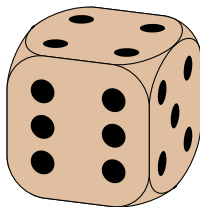


Probabilités



On lance un dé ordinaire. Quelle est la probabilité d'obtenir un « 1 » ?



On lance un dé ordinaire. Quelle est la probabilité d'obtenir un « 1 » ?

Que signifie la réponse donnée ?

Comment vérifier qu'elle correspond à la vérité ?

Qu'est ce que le hasard ?



Idées générales

- Au départ (Aristote), quelque chose de « probable » est quelque chose de communément admis.
- Vers la renaissance, la « probabilité » devient la mesure de la vraisemblance d'un énoncé.
- La théorie de probabilités commence au XVIe – XVIIe siècles dans le cadre des jeu de hasard (Cardano, Fermat, Pascal...)
- La théorie se modernise jusqu'au XXe siècle avec Komogorov.



Idées générales

- Au départ (Aristote), quelque chose de « probable » est quelque chose de communément admis.
- Vers la renaissance, la « probabilité » devient la mesure de la vraisemblance d'un énoncé.
- La théorie de probabilités commence au XVIe – XVIIe siècles dans le cadre des jeu de hasard (Cardano, Fermat, Pascal...)
- La théorie se modernise jusqu'au XXe siècle avec Komogorov.



On peut voir les probabilités comme une **prédiction** : On fait une expérience dont le résultat est **aléatoire**. La probabilité est calculée **avant** de faire l'expérience et est une sorte de prédiction quant au résultat.

I. Vocabulaire



En probabilité, au lycée, il n'y a que des calculs simples.

La difficulté consiste à bien interpréter les problèmes soumis et à se méfier de l'intuition. Les probabilités nous enseignent qu'en de nombreuses occasions, notre intuition est biaisée (c'est vrai dans la vie de tous les jours).

Éviter ces biais passera par bien définir de quoi on parle.

Exemple de situation trompeuse : Une famille a deux enfants. L'un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit également un garçon ?



Dernier exemple concret pour l'anecdote : Une femme a perdu deux enfants, apparemment morts d'une certaine maladie rare. Le procureur a argué que cette maladie ayant 1 chance sur 10 000 000 de se déclarer, il n'y avait alors que 1 chance sur 100 000 000 000 000 que cette femme perde ainsi ses deux enfants et qu'elle était donc certainement coupable de les avoir tués.

Ce raisonnement biaisé a bien failli faire aller cette femme en prison.

1) Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs **issues** (résultats) sont possibles.

1) Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs **issues** (résultats) sont possibles.

Exercice 1 Je jette un dé à 6 faces. Quelles sont les issues possibles ?

Exercice 2 Je jette deux dés, un rouge et un bleu, et je fais la somme des deux dés. Quelles sont les issues possibles ?

1) Expérience aléatoire

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs **issues** (résultats) sont possibles.

Exercice 1 Je jette un dé à 6 faces. Quelles sont les issues possibles ?

Exercice 2 Je jette deux dés, un rouge et un bleu, et je fais la somme des deux dés. Quelles sont les issues possibles ?

 **Remarque :** le caractère aléatoire d'une expérience concrète est impossible à définir. Par exemple, la météo de demain obéit à des lois physique mais elles ne sont pas exactes et elles dépendent de mesures imparfaites... Le hasard est généralement une mesure de notre ignorance.

2) Univers

L'univers, noté Ω , est l'ensemble des issues.

2) Univers

L'univers, noté Ω , est l'ensemble des issues.

Exercice 3 Dans un jeu de 52 cartes, je pioche une carte au hasard et je m'intéresse à la carte choisie.

Quel est l'univers ?

Exercice 4 Des parents vont avoir un enfant. On s'intéresse au sexe (au sens biologique) de l'enfant.

Quel est l'univers ?

3) Événement

Un **événement** est un sous-ensemble de Ω .

Généralement, l'événement correspond à une **assertion** (*phrase dont on peut dire si elle est vraie ou fausse*)

3) Événement

Un **événement** est un sous-ensemble de Ω .

Généralement, l'événement correspond à une **assertion** (*phrase dont on peut dire si elle est vraie ou fausse*)

Exercice 5 Je jette deux dés classique à 6 faces.
Considérons l'événement A : « la somme des dés est 5 ».

Donnez A sous forme de sous-ensemble de Ω .

Exercice 6 Je pioche une carte dans un jeu de 52 cartes.
Considérons l'événement B : « la carte est une Dame ».

Donnez B sous forme de sous-ensemble de Ω .

On dit qu'un événement est **réalisé** quand l'issue de l'expérience appartient à l'événement.

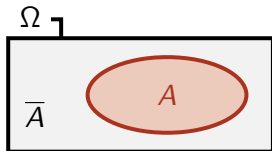
Autrement dit : A est réalisé quand A devient vrai.

On ne le sait qu'après l'expérience !

II. Composition

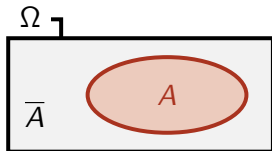
1) Événement contraire

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A . C'est l'ensemble des issues qui **ne sont pas** dans A .



1) Événement contraire

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A . C'est l'ensemble des issues qui **ne sont pas** dans A .



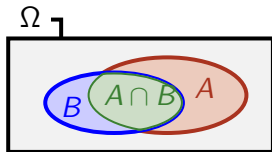
Exercice 7 Je jette un dé à 6 faces...

A est l'événement « Le résultat est pair. »

Explicitez $\bar{A}$ sous forme d'assertion et d'ensemble.

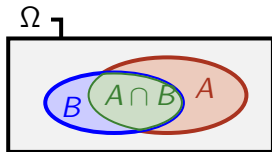
2) Intersection

$A \cap B$ est l'événement qui est réalisé chaque fois que A et B sont réalisés en même temps.



2) Intersection

$A \cap B$ est l'événement qui est réalisé chaque fois que A et B sont réalisés en même temps.



Exercice 8 Jeu de 16 cartes, ci contre on tire une carte...

A : « La carte est un valet »

B : « La carte est un trèfle »

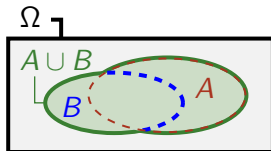
- a) Explicitez $A \cap B$ sous forme d'assertion et d'ensemble.
- b) idem pour $\overline{A \cap B}$.
- c) idem pour $\overline{A} \cap \overline{B}$.

8♠	9♠	10♠	V♠
8♥	9♥	10♥	V♥
8♦	9♦	10♦	V♦
8♣	9♣	10♣	V♣

A et B sont dit **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

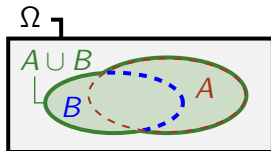
3) Union

$A \cup B$ est l'événement qui est réalisé chaque fois que soit A , soit B est réalisé, ou les deux en même temps.



3) Union

$A \cup B$ est l'événement qui est réalisé chaque fois que soit A , soit B est réalisé, ou les deux en même temps.



Exercice 9 Même chose que précédent...

- a) Explicitez $A \cup B$ sous forme d'assertion et d'ensemble.
- b) idem pour $\overline{A \cup B}$.
- c) idem pour $\overline{A} \cup \overline{B}$.

8♠	9♠	10♠	V♠
8♥	9♥	10♥	V♥
8♦	9♦	10♦	V♦
8♣	9♣	10♣	V♣

III. Loi de probabilité

1) Définition

Une loi de probabilité est la fonction qui associe une probabilité à chaque issue d'une expérience aléatoire.

Exemple : pour un jeu de pile ou face, je peux définir la loi de probabilité :

$$p(FACE) = 70 \%$$

$$p(PILE) = 30 \%$$

1) Définition

Une loi de probabilité est la fonction qui associe une probabilité à chaque issue d'une expérience aléatoire.

Exemple : pour un jeu de pile ou face, je peux définir la loi de probabilité :

$$p(FACE) = 70 \%$$

$$p(PILE) = 30 \%$$



On verra qu'il y a certaines règles à respecter. En théorie, on est libre de définir des lois de probabilités qui ne correspondent à aucune expérience concrètement réalisable. Au contraire, il faut bien comprendre qu'une loi de probabilité est toujours un modèle théorique. Même si elle est censée représenter la réalité, ce n'est qu'un modèle.

2) Probabilité d'un événement

$$p(A) = \sum p(\text{issues de } A)$$

3) Équiprobabilité

On dit qu'il y a équiprobabilité quand :

$$p(\text{chaque issue}) = \frac{1}{\text{nombre total d'issues}}$$

Autrement dit

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

3) Équiprobabilité

On dit qu'il y a équiprobabilité quand :

$$p(\text{chaque issue}) = \frac{1}{\text{nombre total d'issues}}$$

Autrement dit

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre d'issues de } \Omega}$$

 On invite à utiliser l'équiprobabilité par des indices : un dé parfaitement équilibré ; un jeu de carte parfaitement mélangé ; etc.

Mais c'est toujours critiquable !

Exercice 10 On considère un dé **parfaitement équilibré**.

A : « Le résultat est pair »

Donnez $p(A)$.

Exercice 11 On considère 2 dés équilibrés.

A : « La somme des deux dés fait 5 »

B : « La somme des deux dés fait 7 »

C : « La somme des deux dés fait 12 »

Donnez les probabilités de A , B et C .

Exercice 12 Dans une famille de deux enfants, l'un des deux est un garçon.

On considère équiprobable la naissance d'une fille ou d'un garçon.



Pour info, environ 51 % des nouveaux nés sont des garçons.

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

4) Propriétés



Pour comprendre les propriétés qui viennent, il faut comprendre ce que représente une probabilité.

Si je dis que, au pile ou face, $p(PILE) = 50\%$, cela ne me dit pas grand chose sur le prochain lancer. J'aurais PILE ou FACE mais impossible de prédire lequel.

Mais je sais que, **si je répète un grand nombre de fois** mon lancer, j'aurais environ 50 % de PILE.

Cela veut dire qu'une probabilité exprime une prédiction de **fréquence** de réalisation sur un grand nombre d'essais.

Donc une probabilité est forcément positive et **toujours** entre 0 % et 100 %.

4) Propriétés

Toute loi de probabilité p doit respecter ces propriétés :

- $p(\Omega) = 1$
- $p(\emptyset) = 0$
- $0 \leq p(A) \leq 1$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4) Propriétés

Toute loi de probabilité p doit respecter ces propriétés :

- $p(\Omega) = 1$
- $p(\emptyset) = 0$
- $0 \leq p(A) \leq 1$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exercice 13 On tire une carte au hasard, il y a équiprobabilité.

A : « La carte est un valet »

B : « La carte est un trèfle »

- a) Mettez en évidence A , B , $A \cap B$, $A \cup B$ sur la figure.

8♠	9♠	10♠	V♠
8♥	9♥	10♥	V♥
8♦	9♦	10♦	V♦
8♣	9♣	10♣	V♣

- b) Donnez les probabilités correspondantes.
- c) Comparez avec la formule.

5) probabilités a priori ou statistiques

Cas 1 : Dé parfaitement équilibré $\Rightarrow$ Chaque face a même probabilité
 $\Rightarrow$ a priori $p(1 \text{ face}) = \frac{1}{6}$

5) probabilités a priori ou statistiques

Cas 1 : Dé parfaitement équilibré $\Rightarrow$ Chaque face a même probabilité
 $\Rightarrow$ a priori $p(1 \text{ face}) = \frac{1}{6}$

Cas 2 : On prélève un individu dans la population française. On s'intéresse à son groupe sanguin.

$$p(\text{groupe A}) = ?$$

5) probabilités a priori ou statistiques

Cas 1 : Dé parfaitement équilibré $\Rightarrow$ Chaque face a même probabilité
 $\Rightarrow$ a priori $p(1 \text{ face}) = \frac{1}{6}$

Cas 2 : On prélève un individu dans la population française. On s'intéresse à son groupe sanguin.

$$p(\text{groupe A}) = ?$$

On suppose l'**équiprobabilité des individus** + il faut connaître la **fréquence statistique** : 44 % de groupe A en France.

$$p(\text{groupe A}) = 44 \%$$

IV. Tableau et arbre

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . **Parmi eux**, 25 % ont un défaut.
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D			
$\bar{D}$			
Total			

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . **Parmi eux**, 25 % ont un défaut.
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D			
$\bar{D}$			
Total			100 %

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . Parmi eux, 25 % ont un défaut.
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D			
$\bar{D}$			
Total	84 %		100 %

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . Parmi eux, 25 % ont un défaut.
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D			
$\bar{D}$			
Total	84 %	16 %	100 %

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . Parmi eux, 25 % ont un défaut.
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D			31 %
$\bar{D}$			
Total	84 %	16 %	100 %

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . Parmi eux, 25 % ont un défaut.
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D			31 %
$\bar{D}$			69 %
Total	84 %	16 %	100 %

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . Parmi eux, 25 % ont un défaut.
 $25 \% \times 84 \% = 21 \%$
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D	21 %		31 %
$\bar{D}$			69 %
Total	84 %	16 %	100 %

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . Parmi eux, 25 % ont un défaut.
 $25 \% \times 84 \% = 21 \%$
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D	21 %	10 %	31 %
$\bar{D}$	63 %	6 %	69 %
Total	84 %	16 %	100 %

Par exemple $p(A \cap D) =$

1) Tableau

Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\bar{D}$).

- 84 % des objets viennent de A . Parmi eux, 25 % ont un défaut.
 $25 \% \times 84 \% = 21 \%$
- 31 % des objets ont un défaut.

	A	B	Total
D	21 %	10 %	31 %
$\bar{D}$	63 %	6 %	69 %
Total	84 %	16 %	100 %

Par exemple $p(A \cap D) = 21 \%$

2) Arbre

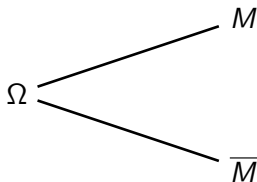
Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

- On estime qu'il y a 15 % de malades,
- le test répond positif avec un taux de 90 % si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de 20 %.

2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

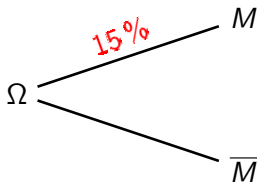
- On estime qu'il y a 15 % de malades,
- le test répond positif avec un taux de 90 % si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de 20 %.



2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

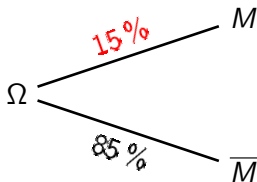
- On estime qu'il y a 15 % de malades,
- le test répond positif avec un taux de 90 % si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de 20 %.



2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

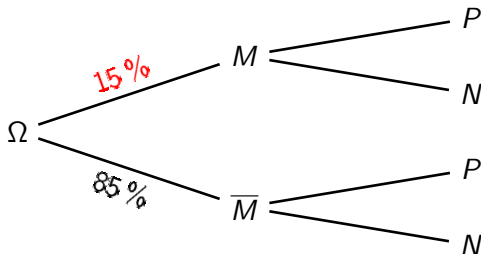
- On estime qu'il y a 15 % de malades,
- le test répond positif avec un taux de 90 % si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de 20 %.



2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

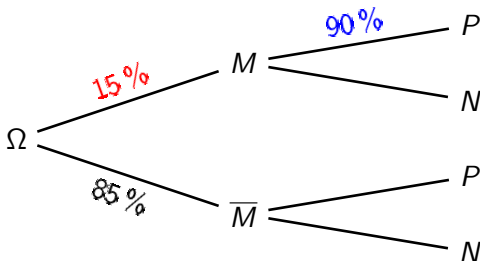
- On estime qu'il y a **15 %** de malades,
- le test répond positif avec un taux de 90 % si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de 20 %.



2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

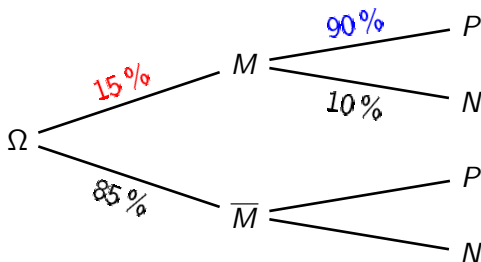
- On estime qu'il y a **15 %** de malades,
- le test répond positif avec un taux de **90 %** si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de 20 %.



2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

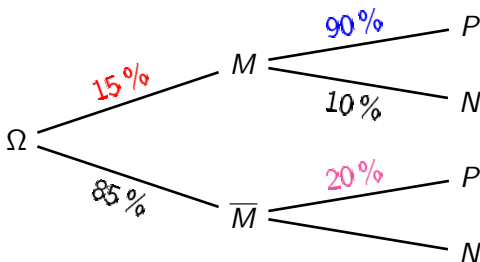
- On estime qu'il y a **15 %** de malades,
- le test répond positif avec un taux de **90 %** si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de 20 %.



2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

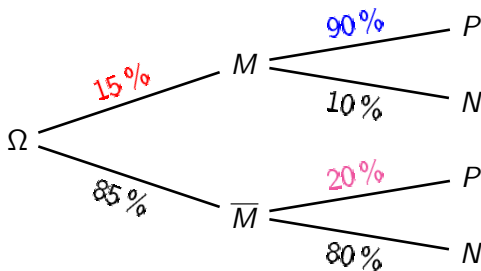
- On estime qu'il y a **15 %** de malades,
- le test répond positif avec un taux de **90 %** si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de **20 %**.



2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

- On estime qu'il y a **15 %** de malades,
- le test répond positif avec un taux de **90 %** si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de **20 %**.

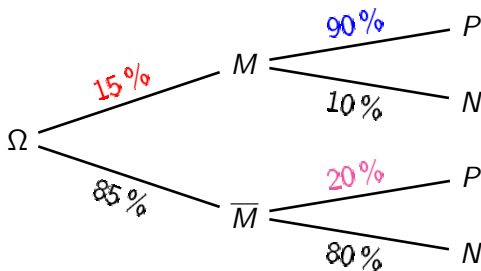


Par Exemple : $p(P) =$

2) Arbre

Une personne prise au hasard est vraiment malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

- On estime qu'il y a **15 %** de malades,
- le test répond positif avec un taux de **90 %** si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de **20 %**.



Par Exemple : $p(P) = 15 \% \times 90 \% + 85 \% \times 20 \% = 30,5 \%$