

Exercice 1 Trouvez la paire q et r dans les cas suivants

- a) $a = 15$ et $b = 4$ b) $a = 0$ et $b = 5$ c) $a = 15$ et $b = 17$ d) $a = -12$ et $b = 7$

Exercice 2 Faites les divisions euclidiennes à la main

- a) $3864 \div 7$ b) $25856 \div 21$

Exercice 3

- a) Donner le seul entier qui est multiple de tous les autres.
 b) Donner les seuls entiers qui sont diviseurs de tous les autres.
 c) Donner les diviseurs positifs de 28.

Exercice 4 Démonstration de la propriété

- a) Traduire l'hypothèse m multiple de a .
 b) Traduire l'hypothèse n multiple de a .
 c) En déduire $m + n$ multiple de a .

Même chose pour $m - n$

Exercice 5 Un nombre de 3 chiffres s'écrit $\overline{CDU}$ où C est le chiffre des centaines, D le chiffre des dizaines et U le chiffre des unités. La barre horizontale sert à dire que les 3 chiffres forment un nombre. On sait que $\overline{CDU} = C \times 100 + D \times 10 + U$.

- a) Justifiez que $U = 0$ ou $U = 5 \Rightarrow \overline{CDU}$ multiple de 5.
 b) Montrez la réciproque.

Exercice 6 $\overline{CDU} = C \times 99 + D \times 9 + (C + D + U)$

- a) Justifiez que $C + D + U$ multiple de 3 $\Rightarrow \overline{CDU}$ multiple de 3.
 b) Montrez la réciproque.

Exercice 7 Démonstration que a impair $\Leftrightarrow a = 2n + 1$.

- a) **Sens $\Rightarrow$** on suppose a impair. La division euclidienne de a par 2 donne $a = 2q + r$. Quelles sont les valeurs possibles de r ? Pourquoi $r = 0$ est impossible? Conclure.
 b) **Sens $\Leftarrow$** on suppose $a = 2n + 1$.
 Raisonnons par l'absurde en supposant a pair. Montrez qu'alors 1 est multiple de 2. Conclure.

Exercice 8 comme exercice 5, montrez que : a pair **ssi** le chiffre des unités de a est pair.

Exercice 9 Montrer que :

- a) Le carré d'un nombre pair est pair. b) Le carré d'un nombre impair est impair.

Exercice 10 n est impair. Montrer que $n^2 = 4k + 1$ pour un certain k entier.

Exercice 11 Mettre les fractions sous forme irréductible.

- a) $\frac{178}{55}$ b) $\frac{45}{10}$ c) $\frac{936}{441}$ d) $\frac{-144}{180}$

Exercice 12 Montrer que $\frac{2n+3}{2n+1}$ est toujours irréductible.

Exercice 12 On veut démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Par l'absurde : on va supposer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est à dire qu'il est possible d'écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

On peut toujours choisir une forme $\frac{p}{q}$ irréductible. On a donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$

- a) Justifier que p^2 est pair. En déduire la parité de p .
 b) Puisque $p = 2p'$, justifier que q^2 est pair. En déduire la parité de q .
 c) Conclure.

Exercice 13 Crible d'Eratosthène.

- i) Prendre la 1^{ère} case non rayée et non entourée.
- ii) Entourer la case, relever sa valeur a .
- iii) Faire des sauts de a cases et rayer toutes les cases rencontrées.
- iv) Recommencer jusqu'à rayer ou entourer toutes les cases.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exercice 14 On prouve que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Par l'absurde : Supposons que p est le plus grand des nombres premiers.

- a) Justifiez que $Q = 1 \times 2 \times \dots \times p + 1$ est plus grand que p .
- b) Justifiez que Q n'est divisible par aucun entier $\leq p$ hormis 1.
- c) Conclure.

Exercice 15 On considère un premier $p \geq 6$. $p = 6 \cdot q + r$, avec $q \geq 1$ et $0 \leq r < 6$.

- a) Justifier que r ne peut être 0, 2, 3 ou 4.
- b) Les entiers de forme $6k + 1$ et $6k + 5$ avec $k \geq 1$ sont-ils tous des premiers ?

Exercice 16 Deux nombres premiers sont dit jumeaux lorsque leur différence est de 2.

- 1) Proposer quelques exemples de nombres premiers jumeaux.
- 2) Soit $p \geq 6$ le plus grand des deux jumeaux. On sait (exo précédent) que l'on peut écrire $p = 6k + 1$ ou $p = 6k + 5$.
 - a) Puisque $p - 2$ est premier aussi, justifier que $p = 6k + 1$.
 - b) Les paires $(6k + 1 ; 6k - 1)$ sont-elles tous des premiers jumeaux ?

Exercice 17 Soit p un premier $p \geq 6$. Montrer que $p^2 = 24k + 1$ pour un k entier.

Exercice 18 Faites la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants.

- a) 426 b) 355 c) 80 d) 510

Exercice 19 On veut prouver que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Par l'absurde, supposons $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Alors on peut écrire : $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \Leftrightarrow 10^n = 3 \cdot a$
Pour un certain entier a et un certain entier n .

- a) Décomposez en facteurs premiers de 10^n .
- b) Conclure.

Exercice 20 Existence du PGCD

- 1) Cas $a = b = 0$.
 - a) Quel est l'ensemble des diviseurs de a et b ?
 - b) Le PGCD existe-t-il ?
- 2) Cas $a \neq 0$. Soit q diviseur de a , alors $a = q \cdot q'$
 - a) Justifier que $q \geq 1$.
 - b) En déduire que $q' \leq a$.
 - c) Justifier que a et b ont toujours au moins un diviseur en commun.
 - d) En conclure l'existence du PGCD de a et b .

Exercice 21 a et b entiers, $(a, b) \neq (0, 0)$.

On en déduit l'algorithme d'Euclide :

- 1) Si $b = 0$, justifier que $PGCD(a, b) = a$.
- 2) Si $b \neq 0$, alors $a = b \cdot q + r$.
 - a) Montrer que tout diviseur commun de a et b divise aussi r .
 - b) Montrer que tout diviseur commun de b et r divise aussi a .
 - c) Conclure que $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$.

```
def PGCD(a,b):
    assert not a,b == 0, 0
    if b == 0:
        return a
    else:
        return PGCD(b, a%b)
```

Exercice 22 $PGCD(a, b)$? a) $a = 159\,058$ et $b = 5\,382$ b) $a = 2\,325$ et $b = 1\,155$