

1 Multiple

Dans cette partie on peut noter un nombre $\overline{MCDU}$ avec M le chiffre des milliers, C le chiffre des centaines, D le chiffre des dizaines et U le chiffre des unités.

Dans d'autres cas, j'écrirais juste d pour le nombre de dizaines et u pour les unités.

Exemple : pour le nombre 4523, $M = 4$; $C = 5$; $D = 2$ et $U = 3$. On a aussi $d = 452$ et $u = 3$.

1.1 Généralité

Avant de commencer, on va toujours avoir des expression comme $A = B + C$ et on se demande si A est multiple de q . À chaque fois, on aura par exemple B multiple de q , donc on aura quelque chose comme :

$$A = b \cdot q + C$$

- Si C est multiple de q , alors $B + C$ est aussi multiple de q et donc A est multiple de q .
 - Si A multiple de q alors $A - B$ aussi et donc C multiple de q .
- Donc A multiple de $q \Leftrightarrow C$ multiple de q .

1.2 Nombre multiple de 2 ?

$$n = d \cdot 10 + u \Leftrightarrow n = (d \cdot 5) \cdot 2 + u \text{ donc } n \text{ multiple de } 2 \Leftrightarrow u \text{ multiple de } 2.$$

On est pas surpris.

1.3 Nombre multiple de 3 ?

$$\begin{aligned} n = \overline{MDCU} &= 1000M + 100C + 10D + U \\ &= 999M + 99C + 9D + (M + C + D + U) \\ &= 3 \times (333M + 33C + 3D) + (M + C + D + U) \end{aligned}$$

Un nombre est donc multiple de 3 si la somme des ses chiffres est multiple de 3.

1.4 Nombre multiple de 5 ?

$$n = 10d + u = 5 \cdot (2d) + u$$

Donc n multiple de 5 $\Leftrightarrow u$ multiple de 5, c'est à dire $u = 0$ ou $u = 5$

1.5 Nombre multiple de 7 ?

On commence par remarquer que $7 \times 7 = 49 = 50 - 1$ ce qui va être utile.

Ensuite on sait que n multiple de 7 $\Leftrightarrow 5n$ multiple de 7. Cela vient du fait que si 7 divise $5n$, c'est forcément qu'il y a un facteur 7 dans la décomposition de n .

$$5n = 5(10d + u) = 50d + 5u = 49d + (d + 5u) = 7 \cdot (7d) + (d + 5u)$$

Donc n multiple de 7 $\Leftrightarrow$ les dizaines plus 5 fois les unités donnent un nombre multiple de 7.

Prenons un exemple : 3374 est-il multiple de 7 ?

- $337 + 5 \times 4 = 337 + 20 = 357$. Ce nombre est-il multiple de 7 ?
 - $35 + 5 \times 7 = 35 + 35 = 70$. Ce nombre est-il multiple de 7 ?
- Oui ! Donc le nombre de départ aussi. 3374 est bien multiple de 7.

1.6 Multiple de 11 ?

$$\begin{aligned}
 n &= 10(10(10M + C) + D) + U \\
 &= (11 - 1)(10(10M + C) + D) + U \\
 &= 11(\dots) - 10(10M + C) - D + U \\
 &= 11(\dots) - (11 - 1)(10M + C) - D + U \\
 &= 11(\dots) + 10M + C - D + U \\
 &= 11(\dots) + 11M - M + C - D + U
 \end{aligned}$$

Au final, n est multiple de 11 ssi la somme alternée de ses digits est multiple de 11.

Exemple : 4785 est bien multiple de 11 car $4 - 7 + 8 - 5 = 0$ est multiple de 11.

1.7 Multiple de 13 ?

On raisonne comme pour le 7 en observant que $4 \cdot 13 = 39 = 40 - 1$.

Puisque 13 est premier avec 4, on sait que n multiple de 13 $\Leftrightarrow 4n$ multiple de 13.

$$4n = 4(10d + u) = 40d + 4u = 39d + (d + 4u) = 13 \cdot (3d) + (d + 4u)$$

n est multiple de 13 ssi le nombre de dizaine plus 4 fois les unités est multiple de 13.

Exemple : 6838 est-il multiple de 13 ?

- $683 + 4 \times 8 = 683 + 32 = 715$ est-il multiple de 13 ?
- $71 + 4 \times 5 = 71 + 20 = 91$ est-il multiple de 13 ?
- $9 + 4 \times 1 = 13$ est-il multiple de 13 ?

OUI. Donc 6838 est bien multiple de 13.

1.8 Multiple de 17 ?

On exploite le fait que $3 \times 17 = 50 + 1$. Je ne refais pas le détail.

n est multiple de 17 ssi le nombre de dizaines **moins** 5 fois les unités est multiple de 17.

Le signe n'a pas d'importance donc on peut faire la soustraction dans le sens qui nous arrange.

Exemple : 12631 est-il multiple de 17 ?

- $1263 - 5 \times 1 = 1263 - 5 = 1258$ est-il multiple de 17 ?
- $125 - 5 \times 8 = 125 - 40 = 85$ est-il multiple de 17 ?
- $8 - 5 \times 5 = -17$ est-il multiple de 17 ?

OUI. Donc 12631 est bien multiple de 17.

1.9 Multiple de 19 ?

On exploite le fait que $19 = 20 - 1$

n est multiple de 19 ssi le nombre de dizaines plus 2 fois le nombre d'unités est multiple de 19.

Exemple : 4769 est-il multiple de 19 ?

- $476 + 2 \times 9 = 476 + 18 = 494$ est-il multiple de 19 ?
- $49 + 2 \times 4 = 49 + 8 = 57$ est-il multiple de 19 ?
- $5 + 2 \times 7 = 5 + 14 = 19$ est-il multiple de 19 ?

OUI. Donc 4769 est bien multiple de 19.

1.10 Au delà ?

On peut poursuivre... $3 \times 23 = 70 - 1$; $29 = 30 - 1$; $31 = 30 + 1$; etc.

2 Équation diophantienne

Il s'agit d'une équation comme

$$xy + x + 2y = 20$$

On cherche les solutions $(x; y)$ où x et y sont dans $\mathbb{N}^*$.

2.1 Approche 1

Il devrait être évident que $x < 20$.

On peut donc essayer toutes les valeurs $x = 1; x = 2; \dots$ et chercher systématiquement les solutions.

2.2 Approche 2

On peut chercher une factorisation. Ici, si on factorise les x on voit :

$$xy + 2y = x(y + 1)$$

Il faudrait pouvoir faire de même avec le bloc restant.

$$2y = \dots (y + 1)$$

On sent qu'il faudrait

$$2y + 2 = 2(y + 1)$$

On peut donc améliorer l'équation de départ :

$$\begin{aligned} xy + x + 2y = 20 &\Leftrightarrow xy + x + 2y + 2 = 22 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)(y + 1) = 22 \end{aligned}$$

Mais $22 = 1 \times 22 = 2 \times 11$. On a donc les cas suivants :

$x + 2$	1	22	2	11
$y + 1$	22	1	11	2

Les 3 premiers cas ne vont pas (donneraient des solutions ≤ 0) on en conclut que $x + 2 = 11$ et $y + 1 = 2$. Ne reste qu'à conclure.

3 Multiple de 3

Montrer que $n^2 + 1$ n'est jamais multiple de 3.

Aide : Si on fait la division euclidienne de n par 3, le reste ne peut être que 0, 1 ou 2. Donc $n = 3q$ ou $n = 3q + 1$ ou $n = 3q + 2$. Il suffit de voir ce qui se passe dans chaque cas pour conclure.