

Trigonométrie et projection



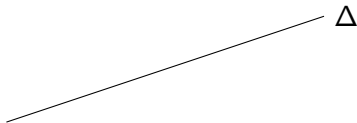
Nous avons déjà revu / allons revoir dans les TD :

- Théorème de Pythagore,
- Théorème de Thalès,
- Propriétés sur les angles et les triangles.

Ces TDs font partie du cours, nous n'y reviendrons pas.

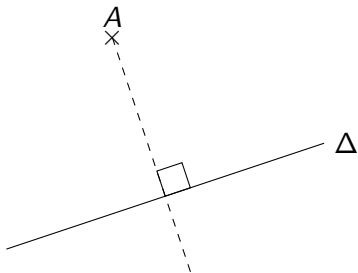
I. Projeté orthogonal

1) Définition



Soit Δ et A une droite et un point du plan.

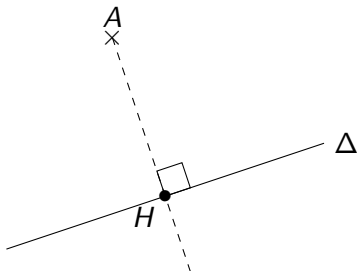
1) Définition



Soit Δ et A une droite et un point du plan.

- Par A on amène la **perpendiculaire** à Δ ,

1) Définition

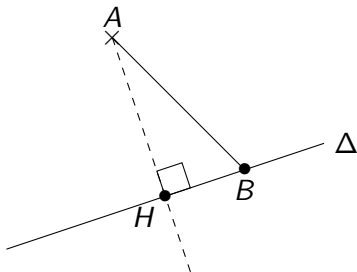


Soit Δ et A une droite et un point du plan.

- Par A on amène la **perpendiculaire** à Δ ,
- cette perpendiculaire coupe Δ en H .

H est le **projeté orthogonal** de A sur Δ .

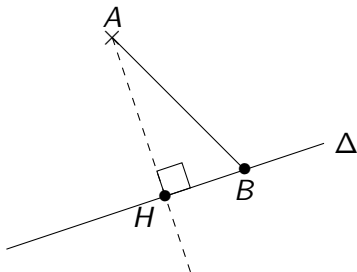
2) Distance point – droite



Soit B un point quelconque de Δ .

Exercice 1 Justifier que : $AH \leq AB$.

2) Distance point – droite



Soit B un point quelconque de Δ .

Exercice 1 Justifier que : $AH \leq AB$.

La distance entre A et $B \in \Delta$ est minimale quand B est confondu avec H , le projeté orthogonal de A sur Δ .

AH est la distance de A à Δ .

Exercice 2 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on place les points $A(0; 4)$, $B(2; 0)$ et $C(5; 1)$.

- a) Donner la valeur de BC .
- b) Donner une équation de (BC) .
- c) Donner une équation de h_A , perpendiculaire à (BC) passant par A .
- d) Donner les coordonnées de H , intersection de (BC) et h_A .
- e) Calculer AH . *C'est la distance de A à (BC)*
- f) Calculer l'aire de ABC .

 On peut prouver de façon générale que si $(BC) : ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ alors la distance de A à la droite sera :

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Appliqué dans le cas précédent, avec $(BC) : x - 3y - 2 = 0$ et $A(0; 4)$ on a :

$$d = \frac{|0 - 3 \times 4 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$$

Puisque a , b et c peuvent être calculés directement à partir de $(x_B; y_B)$ et $(x_C; y_C)$, on pourrait même en déduire une formule directe pour l'aire de ABC .

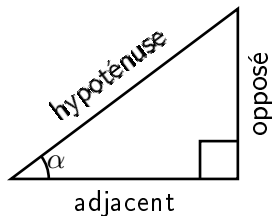
C'est un intérêt de la géométrie analytique : on produit beaucoup de formules pour faire tous des calculs directs. Ces formules peuvent être déclinées en fonctions ce qui permet à l'ordinateur de tout calculer.

II. cos et sin

Dans un triangle rectangle, on considère l'angle α .

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

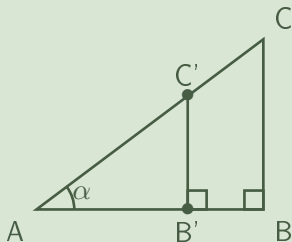
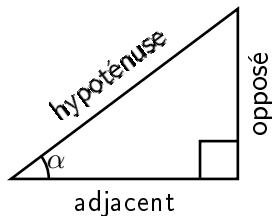
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$



Dans un triangle rectangle, on considère l'angle α .

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

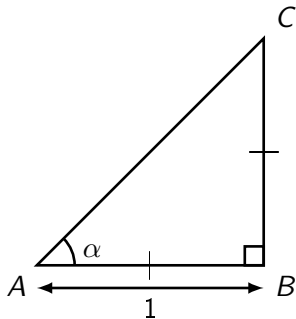
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$



cos et sin ne dépendent pas des dimensions du triangle, mais seulement des **rapports** de ses dimensions. Par ex., $\sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

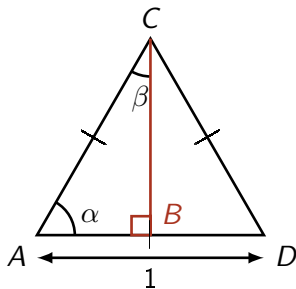
Exercice 3 ABC isocèle. On pose $AB = 1$.

- a) Que vaut l'angle $\hat{B}$ en degrés ?
- b) Que peut-on dire des angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$?
- c) On sait que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.
Déduisez-en la valeur de $\hat{A} = \alpha$.
- d) D'après le théorème de Pythagore,
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Calculez AC .
- e) Déduisez-en $\cos(45^\circ)$ et $\sin(45^\circ)$.



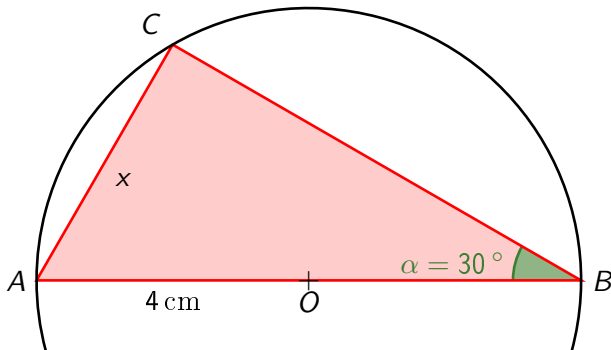
Exercice 4 ADC équilatéral. On pose $AD = 1$. B milieu de $[DC]$

1. Que peut-on dire des angles $\hat{A}$, $\hat{D}$ et $\hat{C}$?
2. On sait que $\hat{A} + \hat{D} + \hat{C} = 180^\circ$.
Déduisez-en la valeur de $\hat{A} = \alpha$.
3. Justifier que (BC) est la médiatrice de $[AD]$.
Donc l'angle $\widehat{CBA}$ est un angle droit.
4. Déduisez-en l'angle $\beta = \widehat{ACB}$ en degrés.
5. D'après le théorème de Pythagore,
 $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Calculez BC .
6. Déduisez-en les valeurs de $\cos(30^\circ)$,
 $\sin(30^\circ)$, $\cos(60^\circ)$ et $\sin(60^\circ)$.



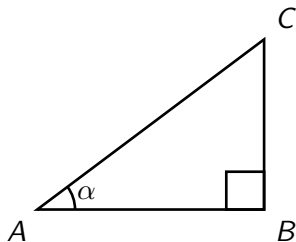
Exercice 5

Calculer x .



Exercice 6

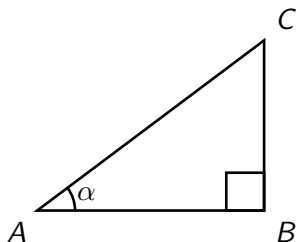
Démonstration au programme



- a) Énoncer le théorème de Pythagore dans ce cas particulier.
- b) Tout diviser par AC^2 dans l'expression précédente.
- c) Faites apparaître $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ dans l'expression obtenue.

Exercice 6

Démonstration au programme



- a) Énoncer le théorème de Pythagore dans ce cas particulier.
- b) Tout diviser par AC^2 dans l'expression précédente.
- c) Faites apparaître $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ dans l'expression obtenue.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$



- On peut alléger et écrire $\cos \alpha$ au lieu de $\cos(\alpha)$.
- Les écritures $\cos(\alpha)^2$ et $\cos \alpha^2$ seraient confuses.

Pour éviter d'écrire :

$$(\cos(\alpha))^2$$

On déplace le carré sur le cos ce qui permet d'écrire :

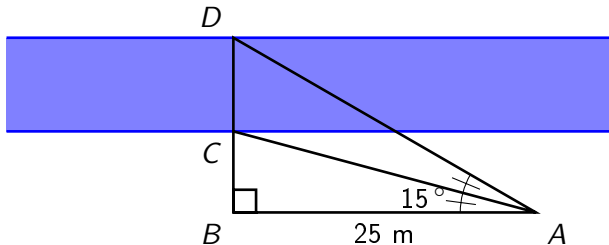
$$\cos^2 \alpha$$

C'est plus facile à lire.

Exercice 7

Vérifier que la relation est bien vérifiée pour les cas 45° ; 30° et 60° .

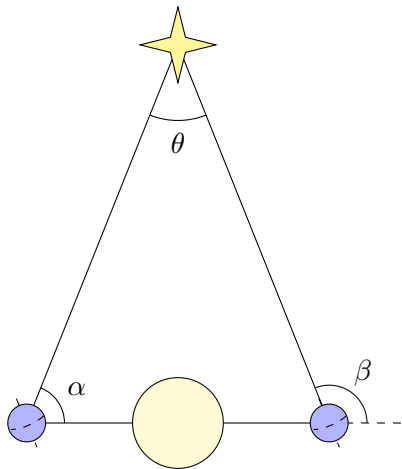
Exercice 8



Quelle est la largeur de la rivière ?

Exercice 9

Depuis la Terre, nous faisons deux observations d'une étoile à 6 mois d'intervalle. L'étoile apparaît avec les angles α et β qui nous permettent d'obtenir l'angle θ . L'usage est de donner $\frac{\theta}{2}$.



$$\frac{\theta}{2} = 0,770''$$

L'étoile étant très loin, on peut considérer et l'orbite de la Terre quasiment circulaire, on peut considérer que le **triangle est isocèle**.

La distance Terre – Soleil est ≈ 150 millions de km.

- a) À quelle distance est cette étoile ? Donner la mesure en années-lumière (AL).
- b) De quelle étoile s'agit-il ?