

Logique

L0 Proposition logique et symbole $\Leftrightarrow$

Une proposition logique est une **déclaration** dont on peut dire qu'elle est **vraie** ou **fausse**.

Exemples :

- Il fait chaud
- $x + 2 = 17$

⚠ $x + 2$ est une expression mathématique mais pas une proposition logique.

Le symbole $\Leftrightarrow$ est utilisé comme un $=$ mais seulement entre des propositions logiques.

Exemple : $x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 5$

$x + 2 = 7$ et $x = 5$ sont bien des propositions logiques et quand l'une est vraie, l'autre l'est aussi.

⚠ En revanche « $x + 2 + 3 \Leftrightarrow x + 5$ » est **interdit** !

On peut dire aussi « si et seulement si » (ou abrégé *ssi*) à la place de $\Leftrightarrow$.

L1 Opérateurs logiques OU, ET

L0

Soient A et B des propositions logiques.

A	B	$A \text{ OU } B$
Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Vrai	Vrai	Vrai

A	B	$A \text{ ET } B$
Faux	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Vrai	Faux	Faux
Vrai	Vrai	Vrai

- $A \text{ OU } B$ est vrai quand au moins une des deux propositions est vraie.
- $A \text{ ET } B$ est vrai quand les deux propositions sont vraies en même temps.

L2 Implication et équivalence**L1** **E0**

Implication : $A \Rightarrow B$ quand B est vrai dès lors que A est vrai.

Une implication valide : $A = 0 \Rightarrow A \cdot B = 0$.

Du moment que $A = 0$, on est certain que $A \cdot B = 0$

Une implication invalide : $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

Cette fois ça n'est pas bon car dans le cas $x = -3$, on voit que le terme de gauche est bien vrai ($x^2 = 9$), mais le terme de droite est faux ($x = 3$).

Réciproque : la réciproque du premier cas $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ est fausse. (on peut avoir $AB = 0$ sans que $A = 0$)

Quand une implication $\Rightarrow$ et sa réciproque $\Leftrightarrow$ sont vraies, il y a équivalence $\Leftrightarrow$.
Comme déjà dit **L0**, $\Leftrightarrow$ est comme une égalité entre des propositions logiques.

Le théorème de Pythagore : ABC rectangle en $B \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$,

et sa réciproque : $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow ABC$ rectangle en B

forment une équivalence : ABC rectangle en $B \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

Fait l'objet d'un TD.

L3 Contraposition**L2**

Si $P \Rightarrow Q$ et que P est fausse, alors on ne peut rien dire sur Q . L'implication $\Rightarrow$ ne permet de conclure que si P est vraie.

P : « I milieu de $[AB]$ »

Q : « $AI = IB$ »

On sait que $P \Rightarrow Q$.

Si P fausse, c'est à dire que I n'est pas au milieu de $[AB]$, on ne peut rien dire pour Q . Selon la position de I , Q pourrait être vraie ou fausse. Il faut d'autres informations pour conclure.

Si on peut dire $P \Rightarrow Q$ alors on a aussi $\text{NON } Q \Rightarrow \text{NON } P$. C'est la **contraposée**.

Si Q fausse, alors P fausse. C'est à dire que si $AI \neq IB$, alors I n'est pas au milieu de $[AB]$.

L4 Quantificateurs**L2**

Quantificateur universel : Pour tout.

On considère un ensemble et on énonce une propriété vraie pour tous les éléments de cet ensemble. On utilise l'expression « Pour tout » et pour abrégé, on peut utiliser le symbole $\forall$.

Pour tout x réel, on a $x^2 \geq 0$. Cela peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

Coder l'écriture permet d'abrégé. Mais cela peut devenir plus difficile à lire.

Quantificateur existentiel : Il existe au moins un.

On considère un ensemble et on énonce une propriété qui est vraie pour **au moins** un élément de cet ensemble. On utilise l'expression « Il existe » (on sous-entend « au moins un ») et pour abrégé, on peut utiliser le symbole $\exists$.

$A \in \mathbb{N}$ est un carré parfait s'il existe un entier naturel n tel que $n^2 = A$.

On peut traduire cet énoncé par :

$$A \in \mathbb{N} \text{ est un carré parfait} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n^2 = A$$

Soit E un ensemble, x un élément de cet ensemble et un $P(x)$ une propriété qui dépend de x .

- $\forall x \in E, P(x)$ signifie que la propriété est vraie pour tous les x de l'ensemble.
- La négation du précédent signifie que l'on peut trouver au moins un x pour lequel la propriété est fausse :

$$\exists x \in E, \text{NON } P(x)$$

- $\exists x \in E, P(x)$ signifie que la propriété est vraie pour au moins un x de l'ensemble.
- La négation du précédent signifie que l'on ne peut trouver aucun x pour lequel la propriété est vraie, ce qui revient à dire que la propriété est fausse pour tous les x :

$$\forall x \in E, \text{NON } P(x)$$

P : « Toutes les voitures rouges sont rapides »

On sent que cette affirmation est fausse. C'est donc probablement $\text{NON } P$ qui est vraie. Nous voulons énoncer sous une forme simple $\text{NON } P$.

$\text{NON } P$: « Il existe (au moins) une voiture rouge qui n'est pas rapide »

Remarque : En mathématique on vous demande de faire des raisonnements sur des égalités. Par exemple $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ou bien $2x + 3 = 7$.

- $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $2x+3 = 7$ n'est vraie que pour une certaine valeur de x et justement, on vous demande de la trouver.

L5 Disjonction des cas

Exemple : On veut prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$

- Dans le cas $x \geq 0$,
on sait que le produit de deux positifs est positifs, donc $x^2 \geq 0$.
- Dans le cas $x < 0$,
on sait que le produit de deux négatifs est positif, donc $x^2 \geq 0$.

Comme dans chaque cas, on aboutit à $x^2 \geq 0$, alors on peut conclure que l'on a toujours $x^2 \geq 0$.

On a séparé l'ensemble des possibles en deux cas plus simples. Dans un chacun des cas simple, on obtient bien la conclusion voulue. La conclusion est donc valide dans tous les cas.

L6 Démonstration par l'absurde

On veut prouver que A est vrai. Pour cela on fait l'hypothèse que A est faux et on prouve que cela conduit à une absurdité.

Exemple : Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

E8*

Remarque : La démonstration par l'absurde repose sur le principe du **tiers exclu**. Cela veut dire que soit A est vrai, soit A est faux mais il n'y a pas de troisième possibilité (troisième possibilité inexistante = tiers exclu)

Donc si on a pu montrer que A ne peut être faux, on conclut qu'il doit être vrai.

Ce principe semble évident pourtant on a pu construire des situations particulières où on avait ni A vrai, ni A faux. C'est le cas du célèbre **paradoxe du Barbier** de Russel.

L7 Opérateur logique NON**L0**

Soit A une proposition logique.

$\text{NON } A$ est vraie ssi A est faux.

A	$\text{NON } A$
Faux	Vrai
Vrai	Faux

Ensembles

E0 Ensembles et notations $\in$, $\subset$, $\emptyset$

Un ensemble E est un rassemblement d'éléments distincts.

Exemple : $E = \{\text{chien}, \text{chat}, \text{souris}\}$ est un ensemble.

- $\text{chien} \in E$: l'élément « chien » est dans E
- $A = \{\text{chien}, \text{chat}\}$
 $A \subset E$: tous les éléments de A sont dans E .

L'**ensemble vide** est l'ensemble qui ne contient rien, noté $\emptyset$.

E1 Ensembles $\mathbb{N}$

E0

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers **naturels**.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$$

E2 Ensembles $\mathbb{Z}$

E1

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers **relatifs**.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\} \quad ; \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Zahl = nombre en allemand

E3 Ensembles $\mathbb{D}$

E2

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres **décimaux** : nombres dont l'écriture décimale est finie.

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\} \quad ; \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

Exemple : $32,486 = \frac{32\,486}{10^3}$ est un décimal mais pas $\frac{1}{3}$ (voir [E6]).

E4 Écriture décimale et encadrements**E3**

Encadrer x à 10^n près c'est chercher une écriture de forme

$$a \cdot 10^n \leq x < (a + 1) \cdot 10^n \quad a \in \mathbb{Z}$$

$x = 3\,439,495$,

- encadrement à 100 : $3\,400 \leq x < 3\,500$
- encadrement à 10^{-1} : $3\,439,4 \leq x < 3\,439,5$
- encadrement à 10^{-2} : $3\,439,49 \leq x < 3\,439,50$

⚠ Dans le dernier cas, on écrit bien « ,50 »

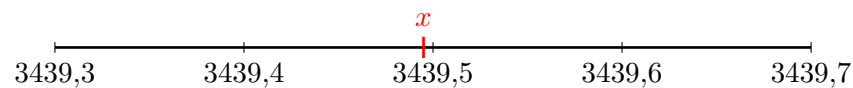
Arrondir à 10^n le plus proche, c'est choisir la borne de la plus proche de l'encadrement.

En cas d'égalité, on a le choix. Cela dépend du contexte.

$x = 3\,439,495$,

- à 100 près, $x \approx 3\,400$
- à 10^{-1} près : $x \approx 3\,439,5$
- à 10^{-2} près : $x \approx 3\,439,49$

Pour bien comprendre : si j'encadre à 10^{-1} près, cela revient à vouloir placer x sur un axe gradué avec des échelons tous les 0,1 :



Il est clair sur cette figure que $3\,439,4 \leq x \leq 3\,439,5$ et que le plus proche est $3\,439,5$.

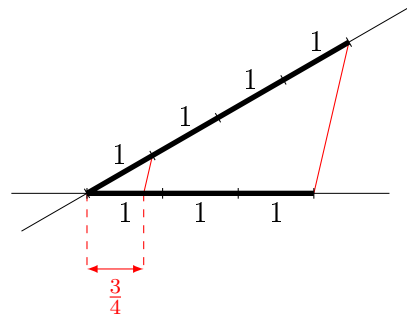
E5 Ensembles $\mathbb{Q}$ **E3**

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres **rationnels** : nombres pouvant s'écrire comme une fraction d'entiers.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\} \quad ; \quad \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

Si on pense un nombre comme la mesure d'une longueur, on peut créer un nombre de $\mathbb{Q}$ à la règle et au compas à l'aide de longueurs unité. Prenons l'exemple de $\frac{3}{4}$.

On crée un segment de 4 unités, l'autre de 3 unités et par Thalès **G2**, on peut construire le segment de $\frac{3}{4}$ d'unité.



Un même nombre peut avoir plusieurs écriture, par exemple $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$. On peut néanmoins

A6 réduire les facteurs premiers en commun pour obtenir une forme irréductible.

A Ne pas confondre un nombre comme $\frac{1}{7}$ et une approximation, même très précise, comme 0,142 857 142 86.

E6 Il existe $x \in \mathbb{Q}$ mais $x \notin \mathbb{D}$ **E4 E5 A6**

Soit $x = \frac{p}{q}$ un nombre de $\mathbb{Q}$, écrit sous forme réduite.

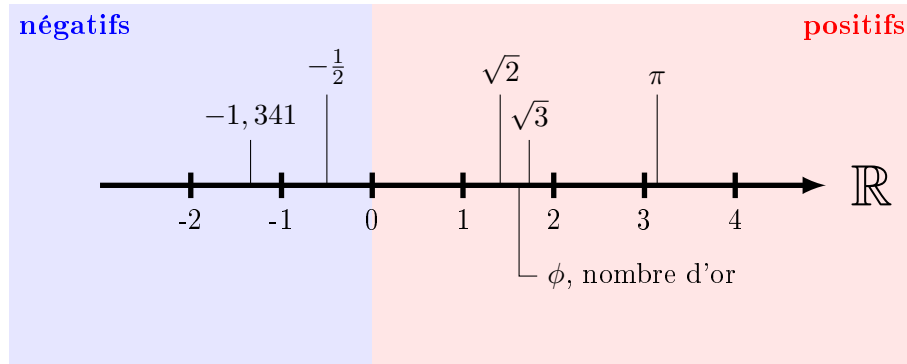
$x \in \mathbb{D} \Leftrightarrow$ la décomposition en facteurs premiers de q ne contient que 2 ou 5.

Exercice **E6***

E7 Droite des réels**E4**

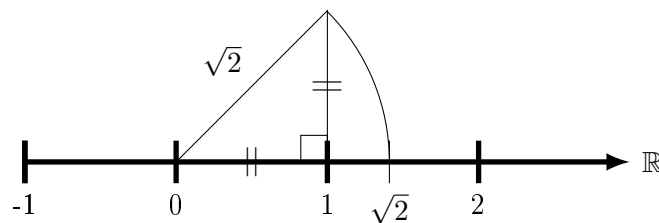
La définition formelle de $\mathbb{R}$ est très compliquée. On utilise l'image d'une droite pour simplifier.

On peut représenter $\mathbb{R}$ par la **droite des réels**. Chaque point de la droite représente un réel. On place un 0 et 1 sur la droite pour donner un **origine**, une **échelle** et un **sens positif**.



$\mathbb{R}$ est un ensemble

- **continu** (sans trou)
- **ordonné** : pour a et b dans $\mathbb{R}$, on a toujours soit $a < b$, soit $a = b$ soit $a > b$.
Ce n'est pas le cas pour des points dans un plan ou pour des rectangles par exemple.
- 0 est à la fois positif et négatif.
- $\mathbb{R}$ contient tous les nombres (utiles en seconde)

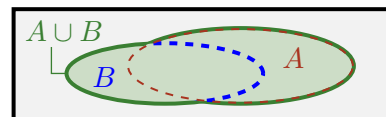
E8 Il existe $x \in \mathbb{R}$ mais $x \notin \mathbb{Q}$ **E7** **A5** **A6**

On peut construire un point de la droite des réels en $\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

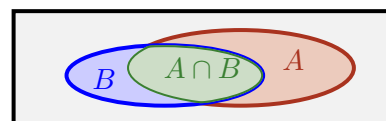
Il faut maintenant montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice **E8*****E9** $\cap$ et $\cup$ **L1** **E0**

L'**union** de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments appartenant à A **OU** à B



L'**intersection** de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant simultanément à A **ET** à B .



E10 Intervalles de $\mathbb{R}$ **E7 E9**

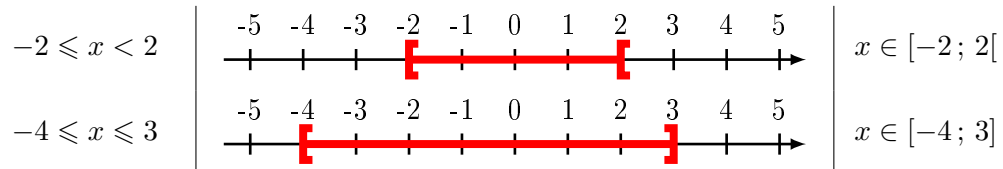
Un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels compris entre deux **bornes**.

On note par exemple $[a; b[$ l'ensemble des réels x tels que

$$a \leq x \quad \text{ET} \quad x < b$$

Soit encore

$$a \leq x < b$$



⚠ Ne pas confondre $\{a; b\}$ et $[a; b]$!

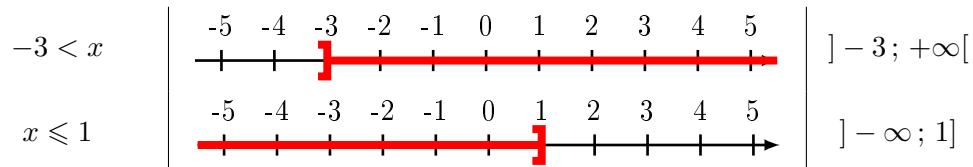
E11 Infini**E10**

On utilise ∞ pour désigner l'infini, toujours avec $+$ ou $-$.

⚠ $\infty \notin \mathbb{R}$. C'est un concept, une idée, pas un nombre.

Veut dire « Aussi grand que l'on veut »

⚠ On écrit jamais ∞ seul. Toujours $+\infty$ ou $-\infty$.

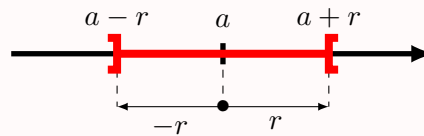


E12 $|x - a| < r$ ou $|x - a| \leq r$ **E10 AL4**

$|x - a|$ forcément positif, donc dans le cas où $r < 0$, **pas de solution**.

Dans le cas r positif : a est le **centre** de l'intervalle solution et r est son **rayon**.

$$\begin{aligned} |x - a| < r &\Leftrightarrow -r < x - a < r \\ &\Leftrightarrow a - r < x < a + r \\ &\Leftrightarrow x \in]a - r ; a + r[\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} |x - 3| < 12 &\Leftrightarrow -12 < x - 3 < 12 \\ &\Leftrightarrow -9 < x < 15 \\ &\Leftrightarrow x \in]-9 ; 15[\end{aligned}$$

E13 Ensemble complémentaire**L7 E0**

$\overline{A}$ est le **complémentaire** de A dans Ω , c'est à dire Ω que $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ne sont pas dans A .



Arithmétique

Tout ce qui concerne les nombres entiers, en particulier les notions de multiples. Quel nombre entier est multiple de quel autre. Ce qui amène aux nombres premiers et aux décompositions en facteurs premiers.

A1 Division euclidienne

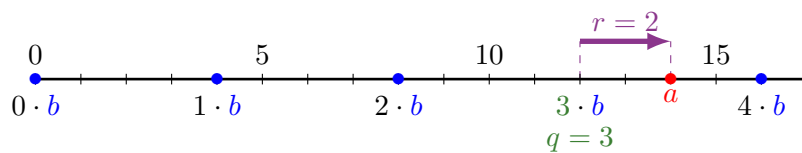
E2

Pour a et b entiers de $\mathbb{Z}$, $b \neq 0$, il existe une unique paire entière q et r telle que :

$$a = q \cdot b + r, \quad \text{avec } 0 \leq r < |b|$$

q est le **quotient** ; r est le **reste**.

Exemple : $a = 14$ et $b = 4$



$$14 = 3 \times 4 + 2$$

Rappel algorithme du primaire : $4955 \div 13$

Remarque : dans le cadre de l'arithmétique, on convient d'utiliser le symbole $\div$ pour parler d'une division entière, c'est à dire une division euclidienne.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 4955 \\
 - 39 \\
 \hline
 105 \\
 - 104 \\
 \hline
 15 \\
 - 13 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 13 \overline{) 4955} \\
 \underline{381} \\
 381 \\
 \underline{381} \\
 2
 \end{array}
 \end{array}$$

$$4955 = 381 \times 13 + 2$$

A2 Notation $\overline{abcd}$

En arithmétique, on écrit par exemple $n = \overline{abcd}$. Dans ce cas, n est un nombre de 4 chiffres et a , b , c et d sont les chiffres qui de l'écriture de n .

Exemple : si $n = 1592$ alors $a = 1$; $b = 5$; $c = 9$; $d = 2$.

Dans le cas d'une écriture **décimale** (en base 10), on a :

$$\overline{abcd} = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$$

Cela fonctionne bien sûr avec 2 ou 3 chiffres : $\overline{ab}$, $\overline{abc}$, ...

A3 Multiple et diviseur**A1**

a et b entiers. On dit que a **est multiple** de b si on peut trouver $q \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$a = q \cdot b$$

c'est à dire reste nul : $r = 0$

On dit aussi : b **divise** a ou encore b **diviseur** de a et on peut noter $b|a$.

A4 Diviseur de $m + n$ et de $m - n$ **A2** **A3**

Si m et n deux entiers multiples de b , alors $m + n$ est multiple de b .

Même chose pour $m - n$

Exemple : 18 et 6 sont multiples de 3. On peut donc dire que $18 + 6 = 24$ et $18 - 6 = 12$ sont multiples de 3.

▲ La réciproque est fausse. En effet 15 est multiple de 3 mais pas 8 et 7. Pourtant $8 + 7 = 15$. Cette situation est un bon exemple pour comprendre la différence entre **implication** ($\Rightarrow$) et **équivalence** ($\Leftrightarrow$) vue dans **L2**.

Démonstration en exercice.

La notation **A2** est utile pour certains exercices.

A5 Parité**A4**

Définition : un entier a est **pair** ssi il est multiple de 2, autrement dit $a = 2q$ pour un certain entier q .

Un entier a est **impair** ssi il n'est pas pair

a est impair $\Leftrightarrow a = 2q + 1$ pour un certain entier q .

Démonstration en exercice.

Le carré d'un entier pair est pair.

Le carré d'un entier impair est impair.

La somme de deux nombres pairs est paire.

Exemple : $a = 17$ est impair. On est certain que a^2 est impair. En effet, le calcul donne $a^2 = 289$.

Démonstration en exercice.

A6 Nombres premiers**A3**

Dans cette section, on se limite à $\mathbb{N}$.

$p \in \mathbb{N}$ est premier ssi p a exactement 2 diviseurs $\in \mathbb{N}$ **distincts**, 1 et lui même.

1 n'est pas premier.

Théorème fondamental de l'arithmétique : Tout entier positif a une décomposition unique en facteurs premiers.

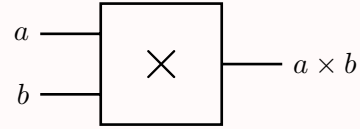
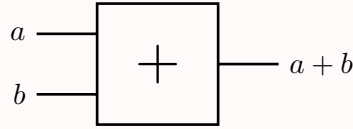
Exemple : $24255 = 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$

Application : réduction de fraction

Calcul littéral

C1 + et $\times$

$+$ et $\times$ sont des **opérateurs binaires**.



Ces opérateurs sont

- **Commutatifs** : $a + b = b + a$ et $a \times b = b \times a$
- **Associatifs** : Pas besoin de parenthèses dans certains cas
 $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ et $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$
- $\times$ se **distribue** sur $+$: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

⚠ On convient de donner la priorité à $\times$. On peut écrire aussi $\cdot$ ou rien à la place de $\times$.

- **Distribuer** c'est **développer** : $a \cdot (b + c) \rightleftharpoons a \cdot b + a \cdot c$
- **Factoriser** est l'opération inverse : $a \cdot b + a \cdot c \rightleftharpoons a \cdot (b + c)$

- On note $x^2 = x \cdot x$ et plus généralement $x^n = \overbrace{x \cdot \dots \cdot x}^{n \text{ fois}}$
- ♥ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

⚠ Supposons que je veuille **développer** $3 \cdot (x + 2) \cdot (5 - x)$. Développer fait agir un symbole multiplier. Si par exemple on choisit de faire agir le premier symbole, alors il faut seulement développer $3 \cdot (x + 2)$. Mais pas les deux en même temps !

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x + 2) \cdot (5 - x) &= (3x + 6) \cdot (5 - x) \\ &= 15x - 3x^2 + 30 - 6x \\ &= -3x^2 + 9x + 30 \end{aligned}$$

C2 Opposé et signe $-$

C1

Tout réel a possède un **unique opposé** $(-a)$ vérifiant $a + (-a) = 0$

Par définition, $a - b = a + (-b)$

On démontre en exercice les règles de développement de $-$

- ♥ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ♥ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

C3 Division et inverse**C2**

Tout réel a **non nul** possède un **unique inverse** a^{-1} vérifiant $a \cdot a^{-1} = 1$.

Par définition, $a/b = a \cdot b^{-1}$

On démontre en exercice les règles de manipulation des fractions : somme, produit, inverse d'inverse... Surtout on fait des calculs !

On convient de noter $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ce qui permet de généraliser la formule $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$. En particulier, $x^0 = 1$ pour $x \neq 0$. Le cas 0^0 est indéfini tout comme $\frac{0}{0}$

C4 Définition $|A|$ **C2** **E7**

$|A|$ est la **valeur absolue** du réel A .

$$|A| = \begin{cases} A & \text{si } A \geq 0 \\ -A & \text{si } A < 0 \end{cases}$$

- $|0| = 0$
- $|151| = 151$
- $\left|\frac{3\pi}{17}\right| = \frac{3\pi}{17}$
- $|-12| = 12$
- $|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$

$|A|$ est toujours ≥ 0 .

C5 Définition de $\sqrt{A}$

- $\sqrt{A}$ n'est défini que si $A \geq 0$
- $\sqrt{A}$ est l'**unique** réel positif x vérifiant $x^2 = A$.

- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{2} \approx 1,414$. Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{D}$, il n'en existe aucune écriture décimale exacte.
- $\sqrt{-4}$ n'existe pas et on ne devrait même pas l'écrire.
- $\sqrt{0} = 0$

*Cette définition nécessite une preuve : le réel positif x existe-t-il ? Est-il unique ? $\rightarrow$ **C5****

C6 Manipulations de $\sqrt{A}$ **C3 C5**

Pour a et b deux réels positifs,

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$



$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

- $\sqrt{4 \times 25} = 2 \times 5$
- $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$
- $\sqrt{16+9} = 5$ mais $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$

Démonstration **C6***

On peut réduire une écriture. Par exemple, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Pour cela il faut chercher les carrés présents dans la racine. Ici, par ex. $50 = 2 \times 25$, or 25 est un carré. On peut aussi utiliser une décomposition en facteurs premiers **A6** pour sortir les doublons de la racine.

$$\begin{aligned} \sqrt{540} &= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5} \\ &= 2 \times 3\sqrt{3 \times 5} \\ &= 6\sqrt{15} \end{aligned}$$

C7 $\sqrt{x^2} = |x|$ **C4 C5 FR5**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemples : $\sqrt{5^2} = 5 \quad \sqrt{(-2)^2} = 2$

Démonstration en exercice.

Algèbre

AL1 Manipulation élémentaire des équations et inéquations

C3 E7

- Une équation est une égalité, contient =
- Une inéquation est une inégalité, contient $<$, $\leq$, $\geq$ ou $>$.
- La partie à gauche est le **membre de gauche**, et à droite le **membre de droite**
- L'équation contient des symboles x , t ... Certains sont les **inconnus**.
- **Résoudre** l'équation / inéquation, c'est trouver l'ensemble des valeurs que doivent prendre les inconnues.
- Une résolution **algébrique** consiste à manipuler l'équation / inéquation jusqu'à aboutir à la solution.

Manipulations autorisées :

- ajouter le même réel des deux côtés,
- multiplier par le même réel des deux côtés **sauf** 0,
- **multiplier** par un **négatif** renverse le **sens** d'une inégalité.

Exemple :

$$\begin{aligned}
 3x + 5 = 17 &\Leftrightarrow 3x + 5 + (-5) = 17 + (-5) \\
 &\Leftrightarrow 3x = 12 \\
 &\Leftrightarrow 3x \times \frac{1}{3} = 12 \times \frac{1}{3} \\
 &\Leftrightarrow x = 4
 \end{aligned}$$

Remarque : L'exemple est très détaillé. On peut se contenter dans une copie de :

$$\begin{aligned}
 3x + 5 = 17 &\Leftrightarrow 3x = 12 \\
 &\Leftrightarrow x = 4
 \end{aligned}$$

AL2 Équation produit**L1 AL1 C3**

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \quad \text{OU} \quad B = 0$$

Si $A = 0$ OU $B = 0$ on aura bien sûr $A \cdot B = 0$.

Dans le sens contraire, si $A \cdot B = 0$, (*Disjonction des cas [L5]*)

- soit $A = 0$,
- soit $A \neq 0$. Alors A a un inverse A^{-1} . On peut multiplier l'égalité par A^{-1} :

$$\begin{aligned} A \cdot B = 0 &\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow B = 0 \end{aligned}$$

Donc, si $A \cdot B = 0$ alors $A = 0$ OU $B = 0$.

Exemple d'utilisation : On veut résoudre $x^2 + 4x - 5 = 0$.

On a vérifié avant que $x^2 + 4x - 5 = (x + 5) \cdot (x - 1)$.

Voici la bonne rédaction :

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 = 0 &\Leftrightarrow (x + 5) \cdot (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 5 = 0 \quad \text{OU} \quad x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -5 \quad \text{OU} \quad x = 1 \end{aligned}$$

AL3 Résolution d'inéquation produit par tableau de signe**F6**

$$\frac{(x + 3) \cdot (10 - 2x)}{x - 1} \leq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+$$

On fait le tableau de signe de l'expression

voir **AL6**

x	0	1	5	$+\infty$
$x + 3$	+	+	+	+
$10 - 2x$	-	-	0	+
$x - 1$	-	0	+	+
$f(x) = \frac{(x + 3) \cdot (10 - 2x)}{x - 1}$	+	-	0	+

On veut ≤ 0 , on peut conclure : $x \in]1; 5]$

AL4 Équation et inéquation avec valeur absolue

AL1 C4

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{si } B < 0, \text{ pas de solutions} \\ \text{si } B = 0, A = 0 \\ \text{si } B > 0, A = B \text{ OU } A = -B \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} |x+3| = -2 & |x+3| = 0 & |x+3| = 5 \\ \Leftrightarrow x+3 = -2 & \Leftrightarrow x+3 = 0 & \Leftrightarrow x+3 = -5 \text{ OU } x+3 = 5 \\ \mathcal{S} = \emptyset & \Leftrightarrow x = -3 & \Leftrightarrow x = -8 \text{ OU } x = 2 \end{array}$$

On a $|A| = B$ et on sait que si $A \geq 0$, $|A| = A$, tandis que si $A < 0$ alors $|A| = -A$.
On peut donc envisager tous les cas selon le signe de A et de B .

	$A \geq 0$ et $A = B$	$A < 0$ et $-A = B$
$B < 0$	impossible	impossible
$B = 0$	revient à $A = 0$	impossible
$B > 0$	revient à $A = B$	revient à $-A = B \Leftrightarrow A = -B$

$$|A| \leq B \Leftrightarrow -B \leq A \leq B \quad \text{même chose avec } < \text{ au lieu de } \leq$$

En particulier, si $B < 0$, il sera impossible que $-B \leq A \leq B$ et alors l'inéquation n'aura pas de solution.

$$\begin{aligned} |2x+10| < 8 &\Leftrightarrow -8 < 2x+10 < 8 \\ &\Leftrightarrow -18 < 2x < -2 \\ &\Leftrightarrow -9 < x < -1 \\ &\Leftrightarrow x \in]-9; -1[\end{aligned}$$

- Soit $A \geq 0$, alors $0 \leq A \leq B$
- Soit $A < 0$, alors $|A| = -A$ et $0 < -A \leq B \Leftrightarrow 0 > A \geq -B$

Suivons un raisonnement possible pour le cas $|A| > B$.

$$\begin{aligned} |A| > B &\Leftrightarrow \text{NON } |A| \leq B \\ &\Leftrightarrow \text{NON } -B \leq A \leq B \\ &\Leftrightarrow A < -B \text{ OU } B < A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x+3| > 8 &\Leftrightarrow \text{NON } |x+3| \leq 8 \\ &\Leftrightarrow \text{NON } -8 \leq x+3 \leq 8 \\ &\Leftrightarrow \text{NON } -11 \leq x+3 \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x < -11 \text{ OU } 5 < x \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty; -11[\cup]5; +\infty[\end{aligned}$$

AL5 Système d'équation**AL1** **L1**

On cherche x et y qui satisfont **simultanément** les deux équations :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 31 & (1) \\ 4x + y = 37 & (2) \end{cases}$$

Étiqueter les équations permet de bien dire comment on les manipule.

Technique 1 : Combinaison linéaire On manipule les équations globalement pour faire disparaître une inconnue. Ici, on va faire disparaître y :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 31 & (1) \\ 12x + 3y = 111 & 3 \times (2) \end{cases} \Rightarrow 4 \times (2) - (1) \quad 10x = 80 \Leftrightarrow x = 8$$

Technique 2 : Substitution On isole une inconnue dans une des équations et on remplace dans les autres.

$$(2) \Rightarrow y = 37 - 4x$$

$$\text{substitution dans (1)} \quad 2x + 3 \cdot (37 - 4x) = 31$$

On aboutit encore à $x = 8$.

Une fois qu'une inconnue est trouvée, on remplace dans les équations pour trouver les autres.

$$\begin{aligned} \text{substitution dans (2)} \quad 2 \times 8 + 3y &= 31 \Leftrightarrow 16 + 3y = 31 \\ &\Leftrightarrow 3y = 15 \\ &\Leftrightarrow y = 5 \end{aligned}$$

Voir **R12** pour l'approche graphique.

AL6 Résolution algébrique d'une équation du second degré**FR5**

Voir **F11** pour méthode graphique.

On veut résoudre $x^2 + 6x + 9 = 49$ dans $\mathbb{R}$.

- 1) Mise sous forme d'une équation $= 0$

$$x^2 + 6x - 40 = 0$$

- 2) On reconnaît un trinôme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Pour résoudre, on doit le mettre sous forme canonique (voir **FR5**)

$$\begin{aligned} x_S &= -\frac{b}{2a} & y_S &= a \cdot x_S^2 + b \cdot x_S + c \\ &= -\frac{6}{2 \times 1} & &= (-3)^2 + 6 \times (-3) - 40 \\ &= -3 & &= -49 \end{aligned}$$

On sait que $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a(x - x_S)^2 + y_S$, ce qui donne ici :

$$x^2 + 6x - 40 = (x + 3)^2 - 49$$

Dans un exercice typique, on pourrait donner directement cette factorisation.

Vous auriez juste à vérifier en développant que l'on a bien

$$(x + 3)^2 - 49 = x^2 + 6x - 40$$

L'équation devient :

$$(x + 3)^2 - 49 = 0$$

- 3) Factorisation par identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

$$(x + 3 + 7) \cdot (x + 3 - 7) = 0 \Leftrightarrow (x + 10) \cdot (x - 4)$$

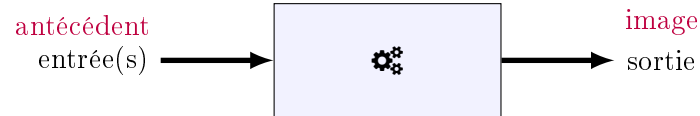
- 4) On reconnaît une équation produit **AL2**

$$x + 10 = 0 \quad \text{OU} \quad x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -10 \quad \text{OU} \quad x = 4$$

Il arrive parfois que le contexte de l'exercice limite les valeurs possibles. Par exemple si x est une longueur, alors $x \geq 0$, ce qui amènerait ici à rejeter la solution $x = -10$.

Fonction

F1 Notion de fonction



Une fonction est une procédure quelconque qui associe un nombre (ou plusieurs) en **entrée** à un nombre en **sortie**.

- La valeur en **entrée** est appelée **antécédent**,
- La valeur en **sortie** est appelée **image**,
- l'ensemble des antécédents autorisés est l'**ensemble de définition**, souvent noté $\mathcal{D}_f$.

Exemple 1 : tableau de valeur

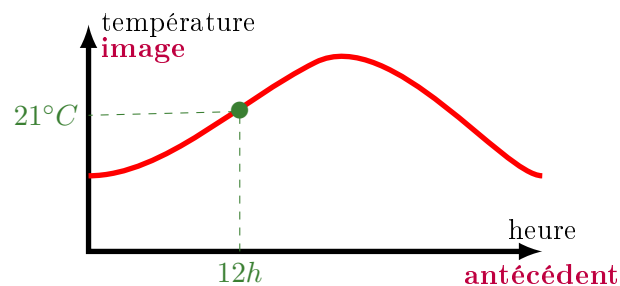
Taille du pied en cm	22,3	23	23,6	...
pointure	35	36	37	...

Le tableau permet de définir une fonction

$$p : \text{taille} \mapsto \text{pointure}$$

On aura $p : \overset{\text{antécédent}}{22,3} \mapsto \overset{\text{image}}{35}$.

Exemple 2 : courbe



$$T : \text{heure} \mapsto \text{température}$$

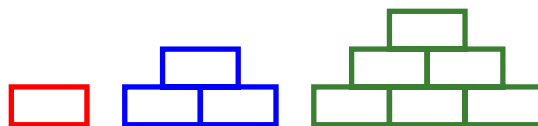
On voit que $T : 12h \mapsto 21^\circ C$. On peut le noter $T(12h) = 21^\circ C$.

Dans cet exemple, $\mathcal{D}_T = [0h ; 24h[$.

Exemple 3 : une procédure On définit une règle de construction de pyramide.

Pour n_e étages, on s'intéresse au nombre N_b de briques nécessaires.

$$f : n_e \mapsto N_b$$



On observe ici, par exemple, que $f(1) = 1$; $f(2) = 3$; $f(3) = 6$

Dans cet exemple, $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$.

Exemple 4 : algorithme

```

1 début
2   Prendre un nombre
3   Ajouter 1
4   Mettre au carré
5   Enlever 2
6   Renvoyer le résultat
7 fin
```

Par exemple, si on fournit le nombre 5, on obtient en retour 34.

$$\begin{array}{cc} \text{antécédent} & \text{image} \\ 5 & \mapsto 34 \end{array}$$

L'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Exemple 5 : expression algébrique

On peut donner directement une expression.

$$f : x \mapsto 3x - 2$$

On peut calculer $f\left(\begin{array}{c} \text{antécédent} \\ 15 \end{array}\right) = 3 \times 15 - 2 = \begin{array}{c} \text{image} \\ 28 \end{array}$.

- x est l'**antécédent**.
- f est la fonction elle-même.
- $f(x)$ est la sortie de f quand on met x en entrée, c'est donc l'**image**.

F2 Tableau de valeurs

F1

Exemple : $f(x) = 4x + 7$

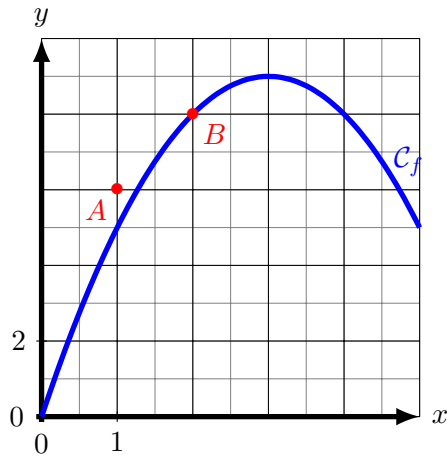
x	0	1	5	12	20
$f(x)$	7	11	27	55	87

⚠ Savoir utiliser la calculatrice pour remplir un tableau de valeurs.

F3 Courbe de fonction**F1**

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ et un repère orthogonal.

La **courbe représentative** de f dans le repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que $y = f(x)$.



$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

Le point $A(1; 6)$ est-il sur la courbe ?

→ **NON** car $f(1) = 5 \neq 6$ càd $f(x_A) \neq y_A$.

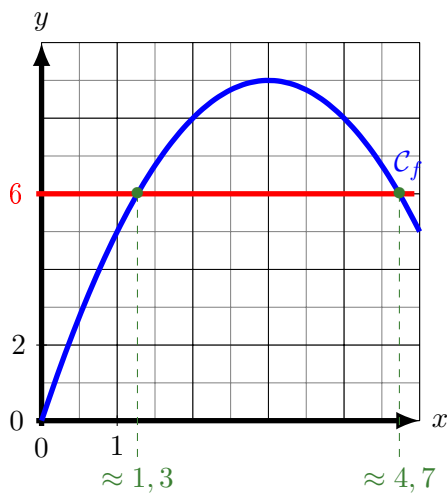
Le point $B(2; 8)$ est-il sur la courbe ?

→ **OUI** car $f(2) = 8$ càd $f(x_B) = y_B$.

▲ Savoir utiliser la calculatrice pour tracer une courbe.

F4 Résolution graphique**F3**

On utilise un graphique pour résoudre une **équation** de type $f(x) = k$.



$$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$$

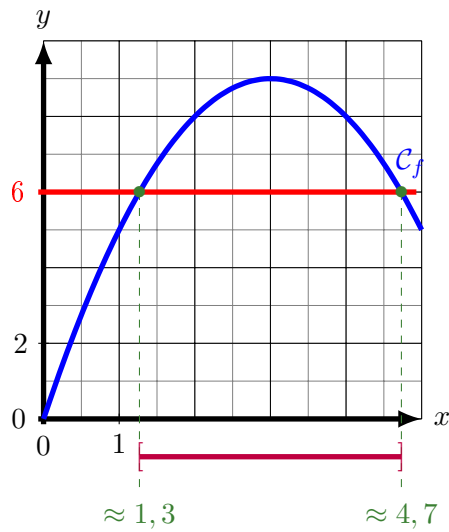
On veut résoudre $f(x) = 6$

- 1) placer une ligne à $y = 6$,
- 2) relever les **abscisses** (x) des intersections avec la courbe.

Les solutions sont $\approx 1,3$ et $\approx 4,7$.

▲ Une solution graphique est **toujours** approximative.

On utilise un graphique pour résoudre une **inéquation** de type $f(x) \leq k$.



$$f(x) = -(x-3)^2 + 9$$

On veut résoudre $f(x) \leq 6$

- 1) placer une ligne à $y = 6$,
- 2) relever les **abscisses** (x) des intersections avec la courbe,
- 3) on en déduit l'**intervalle solution**.

Ici les solutions, $\mathcal{S} \approx [1,3; 4,7]$.

F5 Tableau de signe élémentaire

F1 E7 AL1

Étudier le signe d'une fonction, c'est chercher les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est positif (ou négatif).

Exemple : $f(x) = 3x - 12$ définie sur $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$.

- 1) Résoudre $f(x) = 0$

Ici, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

- 2) Dans le tableau, placer les limites de $\mathcal{D}_f$ et les solutions de $f(x) = 0$.

x	0	4	$+\infty$
$f(x)$		0	

- 3) Trouver le signe de $f(x)$ dans les deux cases.

Par exemple, on peut calculer que $f(0) = -12$ est négatif ce qui permet de conclure pour la case de gauche.

x	0	4	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

F6 Tableau de signe d'une expression produit / quotient**F5** **C2**

On prévoit une ligne dans le tableau de signe pour chaque terme d'une produit ou quotient et une ligne pour le résultat. Puis on tient compte de ce que $- \times - = +$, etc.

$$f(x) = \frac{(x+3) \cdot (10-2x)}{x-1} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^+$$

- Pour chaque terme on cherche la **racine** (valeur de x qui annule)
 - $(x+3)$ $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.
 - $(10-2x)$ $10-2x=0 \Leftrightarrow x=5$.
 - $(x-1)$ $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.
- On commence le tableau en plaçant les valeurs de x utiles et en indiquant les zéros. **▲ Ici, comme le domaine est $\mathbb{R}^+$, la valeur $x=-3$ peut être ignorée.**

x	0	1	5	$+\infty$
$x+3$				
$10-2x$			0	
$x-1$		0		
$f(x) = \frac{(x+3) \cdot (10-2x)}{x-1}$				

- On remplit les signes des lignes élémentaires (voir F6)

x	0	1	5	$+\infty$
$x+3$	+	+	+	+
$10-2x$	-	-	0	+
$x-1$	-	0	+	+
$f(x) = \frac{(x+3) \cdot (10-2x)}{x-1}$				

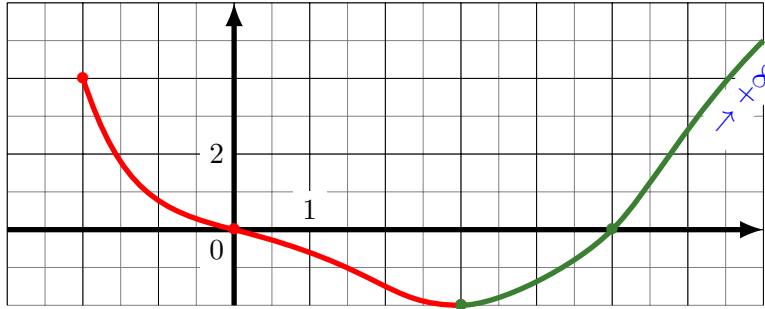
- On peut conclure par produit / division. **▲ Le cas $x=1$ correspond à une division par 0. On indique par une double barre que ce cas est interdit. Ce qui veut dire que $\mathcal{D}_f$ n'est pas $\mathbb{R}^+$ en vérité, mais $\mathbb{R}^+ - \{1\}$**

x	0	1	5	$+\infty$
$x+3$	+	+	+	+
$10-2x$	-	-	0	+
$x-1$	-	0	+	+
$f(x) = \frac{(x+3) \cdot (10-2x)}{x-1}$	+	-	0	+

F7 Variations et extremums**F1 E7 AL1****Première approche intuitive**

On dit qu'une fonction f est **croissante** sur un intervalle quand $f(x)$ augmente avec x . Elle est **décroissante** quand $f(x)$ diminue (quand x augmente).

Un **extremum** est un **minimum** ou un **maximum**.



Avec la courbe de f , on constate que :

- f est décroissante sur $[-2; 3]$
- f est croissante sur $[3; +\infty[$.
- f atteint un minimum de -2 en $x = 3$.
- f n'a pas de maximum ($f(x)$ croît à l'infini mais ne peut pas atteindre l'infini)

Plus formellement, on dit que f est **strictement croissante** sur un intervalle quand elle **conserve l'ordre** :

$$a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

Elle est **strictement décroissante** quand elle **renverse l'ordre**.

Soit $f(x) = 2x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

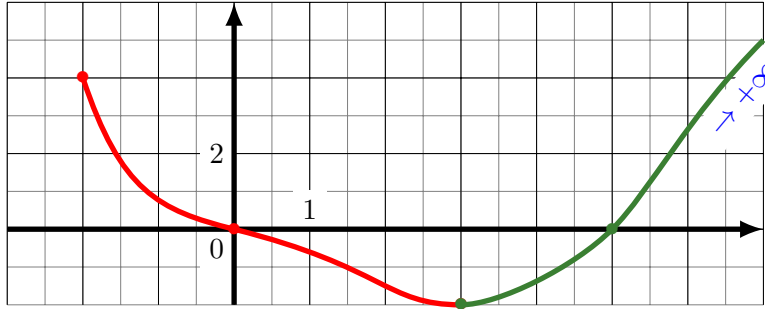
$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow 2a < 2b \\ &\Leftrightarrow 2a + 5 < 2b + 5 \\ &\Leftrightarrow f(a) < f(b) \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

En l'absence du mot *strictement*, cela voudrait dire que la fonction pourrait avoir un moment de « plat ». Cela n'arrive jamais avec les fonctions que l'on étudie de sorte que ce mot ne nous apprend pas grand chose.

F8 Tableau de variations**F7**

Il s'agit d'un tableau qui présente les variations sous une forme plus intuitive.



x	-2	3	$+\infty$
Variations de f	4	-2	$+\infty$

$\searrow$: f **décroissante** ; $\nearrow$: f **croissante** ; **Minimum** de f

▲ pas de **Maximum**

Un maximum/minimum doit être atteint. On ne peut atteindre $+\infty$. Au contraire -2 est bien atteint car $f(3) = -2$.

F9 Applications du tableau de variations**F8**

x	$-\infty$	x_1	-11	x_2	3	4	5	$+20$
Variations de f	$+\infty$	2	-5	2	9	$f(4)$	$f(5)$	3

- Ensemble de définition de f ? $\mathcal{D}_f =]-\infty ; 20]$
- Maximum de $f(x)$? Pas de maximum
- Minimum de $f(x)$? -5 en $x = -11$.
- Combien $f(x) = 2$ a de solutions ? 2 solutions (x_1 et x_2 indiqués dans le tableau)
- Maximum de $f(x)$ sur $[-11; 20]$? 9 en $x = 3$ (maximum local)
- Comparez $f(4)$ et $f(5)$. $f(4) > f(5)$
- Comparez $f(-20)$ et $f(15)$.
On ne sait pas. $f(-20) > -5$ et $3 < f(15) < 9$, c'est tout ce que l'on peut dire.

F10 ? Expression utilisant valeur absolue**F1 F5 C4**

$$f(x) = |2x + 3| + |10 - x| \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

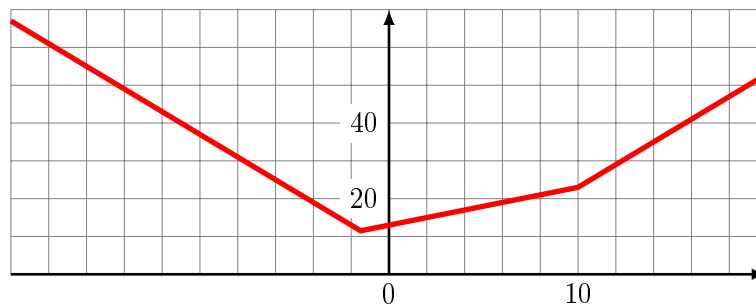
On sait par exemple que si $2x+3 < 0$, alors $|2x+3| = -(2x+3)$. Pour se débarrasser des valeurs absolues qui compliquent l'expression, il faut donc étudier les signe de $2x + 3$ et de $10 - x$.

On fait alors un tableau de signe.

x	$-\infty$	$-1,5$	10	$+\infty$
$2x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$10 - x$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-(2x + 3) + (10 - x)$	$(2x + 3) + (10 - x)$	$(2x + 3) - (10 - x)$	

Ce qui permet de dire (en simplifiant les expressions trouvées) :

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 7 & \text{si } x \leq -1,5 \\ x + 13 & \text{si } -1,5 < x \leq 10 \\ 3x - 7 & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

**F11** Résolution graphique d'une équation du second degré**F4 FR5**

Voir **AL6** pour méthode algébrique.

F12 Parité**F3**

Une fonction définie sur $\mathcal{D}$ est **paire** $\Leftrightarrow$

- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$,
- et $f(-x) = f(x)$.

$f(x) = x^2 + 4$ sur $\mathbb{R}$. On vérifie bien que $f(-x) = (-x)^2 + 4 = f(x)$. Cette fonction est paire.

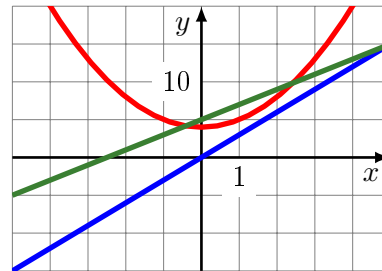
Une fonction définie sur $\mathcal{D}$ est **impaire** $\Leftrightarrow$

- Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$,
- et $f(-x) = -f(x)$.

$g(x) = 3x$ sur $\mathbb{R}$. On vérifie bien que $g(-x) = 3 \cdot (-x) = -g(x)$. Cette fonction est impaire.

- En général, les fonctions ne sont ni paires ni impaires.
- La seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle.
- La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe Oy .
- La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

- $f(x) = x^2 + 4$ est paire $\Leftrightarrow$ sa courbe est symétrique par rapport à Oy .
- $g(x) = 3x$ est impaire $\Leftrightarrow$ sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.
- $h(x) = 2x + 5$ n'est ni paire ni impaire.



Cette utilisation des mots « paire » et « impaire » est liée aux puissances de x . Par exemple, x^2 est un terme pair et x^3 est un terme impair.

Pourcentage

PC1 Définition

Il est très efficace de considérer que $\% = \frac{1}{100}$.

Ainsi on aura tout simplement : $0,45 = \frac{45}{100} = 45 \%$

Sur un ensemble de 40 personnes, on en compte 7 de myopes. Cela représente :

$$\begin{aligned}\frac{7 \text{ personnes}}{40 \text{ personnes}} &= 0,175 \\ &= 17,5 \%\end{aligned}$$

Un % est toujours un **% de quelque chose**.

20 % d'un pot de 300 g, cela représente :

$$\begin{aligned}20 \% \times 300 \text{ g} &= 20 \times \frac{1}{100} \times 300 \text{ g} \\ &= 60 \text{ g}\end{aligned}$$

On peut calculer un % de %. Cela ne change rien.

Dans un sondage commercial, 40 % des interrogés ont dit aimé le produit et parmi eux, 75 % l'ont aimé modérément.

$$\begin{aligned}75 \% \times 40 \% &= 0,75 \times 0,40 \\ &= 0,3 \\ &= 30 \%\end{aligned}$$

Donc 30 % des interrogés ont aimé modérément le produit.

PC2 Augmentation / diminution de $t\%$ **PC1**

- Augmenter une quantité de $t\%$ c'est la multiplier par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Diminuer une quantité de $t\%$ c'est la multiplier par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

J'ai 1000 lapins dans mon élevage. En un an, leur nombre augmente de 15% .

15% de 1000 lapins font 150 lapins.

J'ai donc l'année suivante $1000 + 150 = 1150$ lapins.

On obtient le même résultat en faisant directement le calcul :

$$1000 \times \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 1150$$

Si on envisage plusieurs augmentations / diminutions successives, cette méthode est beaucoup plus efficace !

Le nombre de lapins augmente de 20% une année mais diminue de 15% l'année suivante. Quelle est la variation en $\%$ à la fin ?

Disons que le nombre de lapins initial est Q :

$$Q \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = Q \times 1,02$$

$\times 1,02$ correspond à une augmentation de 2% .

PC3 Taux de variations**PC2**

Une quantité Q passe de Q_{ancien} à Q_{nouveau} . Le taux de variation est :

$$\frac{Q_{\text{nouveau}} - Q_{\text{ancien}}}{Q_{\text{ancien}}}$$

Un ménage a vu ses dépenses de chauffage passer de 5000 € à 5600 €.

$$\frac{5600 - 5000}{5000} = 0,12$$

L'augmentation est de 12% .

Un sportif est passé de 12 secondes sur 100 mètres à 11 secondes.

$$\frac{11 - 12}{12} \approx -0,083$$

Soit une baisse d'environ $8,3\%$.

Le $-$ indique une diminution.

Le contexte d'utilisation des $\%$ fait que l'on approximera si nécessaire.

PC4 **Algorithme : recherche de seuil****PC2***cf. TD*

En guise d'exemple ci-dessous, une quantité Q commence à la valeur 10 et augmente chaque jour de 2%. On cherche à savoir au bout de combien de jours la quantité dépassera la valeur 50.

```

1  début
2  |   Q ← 10
3  |   jour ← 0
4  |   tant que Q < 50 faire
5  |       |   Q ← Q +  $\frac{2}{100} \cdot Q$ 
6  |       |   jour ← jour + 1
7  |   fin
8  |   afficher jour
9  fin

```

```

Q = 10
jour = 0
while Q < 50:
    Q = Q + 2/100*Q
    jour = jour + 1
print(jour)

```

Fonctions de référence

FR0 Notion de fonction de référence

F3 F5 F7 F12

Les fonctions peuvent être arbitrairement compliquées. Il en existe une infinité.

Les fonctions de référence sont des fonctions simples qui reviennent souvent. Les étudier permet déjà de comprendre mieux ce que l'on veut faire quand on étudie des fonctions. Elles permettent aussi d'avoir une meilleure intuition car elles sont les briques de bases qui reviennent dans la plupart des fonctions que l'on rencontre en sciences.

On s'intéressera à la courbe, au signe, aux variations, à la parité de ces fonctions.

FR1 Fonction affine

FR0 C1

On appelle **fonction affine** une fonction f dont l'expression peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = a \cdot x + b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Exemple : $f(x) = 3x + 2$

$$a = 3; b = 2$$

- Si $a = 0$, on dit que f est **constante**,
- si $b = 0$, on dit que f est **linéaire**.

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$+\infty$	$-\infty$

À prouver en exercice.

f est une fonction affine $\Leftrightarrow$ la courbe de f est une droite.

Ce qui peut se prouver avec R8

On utilise F5 pour le tableau de signe ce qui permet de généraliser :

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Enfin, si l'on voulait trouver les valeurs de a et de b dans un cas donné, on pourrait se baser sur un calcul comme R9. En effet, $f(x) = ax + b$, si on s'intéresse à la courbe de f , on a $y = f(x)$ donc $y = ax + b$ ce qui revient au même qu'une équation réduite de droite $y = mx + p$.

FR2 Fonction carré**FR0** **C1**

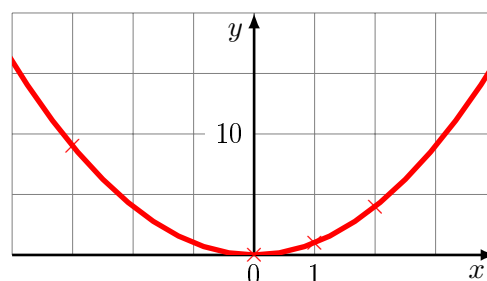
On appelle **fonction carré** la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction carré est **paire**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x^2	+	0	+

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	1	2	-3
x^2	0	1	4	9

**FR3** Fonction valeur absolue**FR0** **C4**

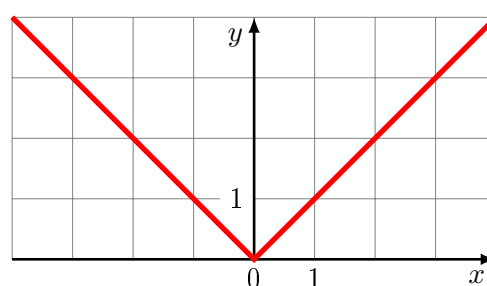
On appelle **fonction valeur absolue** la fonction $x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est **paire**.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x^2	+	0	+

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	1	2	-3	-1
$ x $	0	1	2	3	1

**FR4** Fonction racine carrée**FR0** **C5**

FR5 Fonction du second degré**FR2**

Une fonction du second degré est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (on peut restreindre selon le contexte) par

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

a, b et $c \in \mathbb{R}$. De plus $a \neq 0$.

Si $f(x) = x^2 - 6x$, on reconnaît $a = 1$, $b = -6$ et $c = 0$.

Forme canonique

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \quad \text{avec } x_S = -\frac{b}{2a} \text{ et } y_S = f(x_S)$$

Pour $f(x) = x^2 - 6x$, $x_S = -\frac{-6}{2} = 3$ et $y_S = f(3) = -9$

$$f(x) = (x - 3)^2 - 9$$

On peut vérifier en développant cette expression que l'on retrouve bien $f(x) = x^2 - 6x$.

Partons de la forme factorisée

$$\begin{aligned} a \cdot (x - x_S)^2 + y_S &= a \cdot (x^2 - 2x_S \cdot x + x_S^2) + y_S \\ &= a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x_S \cdot x + a \cdot x_S^2 + y_S \\ &= a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) \cdot x + a \cdot x_S^2 + \overbrace{(a \cdot x_S^2 + b \cdot x_S + c)}^{=y_S} \\ &= a \cdot x^2 + b \cdot x + 2 \cdot a \cdot x_S^2 + b \cdot x_S + c \\ &= a \cdot x^2 + b \cdot x + x_S \cdot \overbrace{(2 \cdot a \cdot x_S + b)}^{=0} + c \\ &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Avec la forme canonique, on déduit que $f(x)$ a toujours la forme d'un **carré**. La **courbe** est donc toujours une **parabole**. Cette parabole est

- dans le sens $\cup$ quand $a > 0$
- dans le sens $\cap$ quand $a < 0$.

FR6 Fonction inverse**FR0 C3****FR7** Comparaison des fonctions x^n **FR2**

Statistiques

S1 Définitions

%1

Cf. cours.

S2 Indicateurs : Médiane, quartiles

S1

Cf. cours.

S3 Indicateurs : Moyenne, écart-type

S1

Cf. cours.

Probabilités

P1 Définitions

S1 E9 E13

On peut voir le hasard comme une mesure de notre **ignorance**. Il existe de phénomènes que l'on a tendance à qualifier d'aléatoire et qui pourtant répondent à des lois de physique parfaitement déterminées. Le hasard représente notre ignorance de ces lois ou notre incapacité à faire les calculs nécessaires.

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle plusieurs **issues** (résultats) sont possibles sans que l'on sache avec certitude laquelle arrivera. L'expérience est (au moins en théorie) susceptible de se répéter un nombre indéterminé de fois.

- Jeter un dé et noter la valeur de la face supérieur. Les issues sont 1, 2, ..., 6
- Prendre une carte au hasard dans un jeu. Les issues sont $R_{\spadesuit}$, $D_{\diamondsuit}$, $10_{\clubsuit}$, etc.
- Ce qui sera au menu dans un an à la cantine.

Ce cas peut paraître non aléatoire. La veille du repas, le menu est choisi et n'est plus aléatoire. Mais un an avant, rien n'est choisi et on ne dispose d'aucun élément pour savoir. Le hasard

L'**univers**, noté Ω , est l'ensemble des issues possibles.

- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pour un dé classique.
- $\{\text{Pile}, \text{Face}\}$ pour le pile ou face
- $\mathbb{N}$ pour le nombre de pains sur le présentoir à la cantine

Un **événement** est un sous-ensemble de Ω . On dit que l'événement est **réalisé** quand l'issue appartient à l'événement.

En général, l'événement est donné comme une **assertion** (phrase vraie ou fausse) et abrégé par un symbole.

- Si je jette un dé, je peux considérer :
 A : « Le résultat est pair », donc $A = \{2, 4, 6\}$
- Si je pioche une carte au hasard,
 B : « La carte est un roi », donc $B = \{R_{\clubsuit}, R_{\spadesuit}, R_{\diamondsuit}, R_{\heartsuit}\}$

Puisque les événements sont des **ensembles**, on peut faire des $\cap$ et des $\cup$.

- $A \cap B$: les événements A et B sont réalisés tous les deux.
- $A \cup B$: au moins un événement, A ou B est réalisé.
- $\overline{A}$: l'événement A **n'est pas** réalisé.

P2 Loi de probabilité**P1**

La probabilité d'un événement correspond à sa **fréquence** de succès si on le répétait un **très grand nombre** de fois de façon identique et indépendante. La probabilité est donc une notion abstraite que l'on ne peut pas vérifier expérimentalement de façon exacte.

La probabilité de l'événement A est notée $p(A)$ ou éventuellement $P(A)$. p est donc une fonction événement $\mapsto$ fréquence.

Dans une situation donnée, pour connaître $p(A)$, il nous faut faire des choix, des hypothèses. Ces hypothèses conduisent à choisir une certaine règle de calcul, autrement dit une certaine fonction p permettant de connaître la probabilité de tous les événements envisageables.

Une **loi de probabilité** est une fonction p qui permet de calculer la probabilité d'un événement.

- On a pour tout A , $0 \leq p(A) \leq 1$, ou si on préfère $0\% \leq p(A) \leq 100\%$.
- p est entièrement déterminée quand on connaît la probabilité de chaque issue.
- $p(\Omega) = 1 = 100\%$
- $p(\emptyset) = 0$.

On joue à pile ou face. Les issues sont P et F .

- a priori, on considère que P et F ont la même probabilité. Alors

$$p(P) = 50\% \quad \text{et} \quad p(F) = 50\%$$

- on a fait des essais avec la pièce et on a constaté que PILE apparaissait dans 60 % des cas. Alors

$$p(P) = 60\% \quad \text{et} \quad p(F) = 40\%$$

Comme toujours en sciences, on **modélise** le réel. Choisir une loi de probabilité, c'est supposer que la réalité va obéir, au moins approximativement, à cette loi.

$$\text{si } A \cup B = \emptyset, \text{ alors } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Cette formule fait partie de la définition d'une loi de probabilité. Il s'en suit :

- $p(A) = \sum_{\text{issues de } A} p(\text{issue})$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

P3 Équiprobabilité**P2**

L'**équiprobabilité** est la loi de probabilité qui suppose que toutes les issues ont la même probabilité. On a donc :

$$p(1 \text{ issue}) = \frac{1}{\text{nombre total d'issues}}$$

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues de } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

On jette un dé équilibré, on s'intéresse à A : « on obtient un résultat ≥ 5 »

- « dé équilibré » invite à supposer que toutes les faces sont équiprobables,
- $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Lien avec les statistiques : Supposons que les élèves parisiens du lycée font 80 % de l'effectif total. Cette information est **statistique**. Je choisis un élève au hasard et considère A : « L'élève choisi est parisien ». L'affirmation $p(A) = 80\%$ est **probabiliste**. Cette affirmation est légitime à condition de supposer l'**équiprobabilité**.

P4 Tableau**P2**

Avec un exemple : Des objets sont fabriqués dans des usines A ou B . Les objets ont un défaut (D) ou pas ($\overline{D}$).

- **84 %** des objets viennent de A . **Parmi eux**, **25 %** ont un défaut.
- **31 %** des objets ont un défaut.

Les alternatives :

- On identifie deux alternatives : A ou B ; D ou $\overline{D}$.
- On devra placer A et B sur un côté du tableau et D et $\overline{D}$ sur un autre.
- **⚠** mettre par ex. A et D sur un même côté serait faux car un objet peut être les deux à la fois ou aucun des deux.

On dit que $\{A, B\}$ est une **partition** de même que $\{D, \overline{D}\}$

On ajoute des cases lignes et colonnes « Total » pour faciliter l'utilisation du tableau.

	A	B	Total
D	21 %	10 %	31 %
$\overline{D}$	63 %	6 %	69 %
Total	84 %	16 %	100 %

- La case **Total** contient toujours 100 %
- **⚠** Les pourcentages doivent toujours être donnés par rapport au **total** !

Donc quand on dit « **Parmi eux**, **25 %** ont un défaut », il faut comprendre que c'est **25 %** des **84 %** et il faut faire le calcul : **25 %** $\times$ **84 %** = **21 %**.

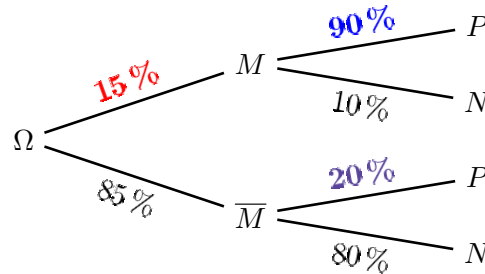
- Quand on dit **84 %** vient de A et qu'on ne précise rien concernant le défaut, il faut comprendre que c'est le total de A .

Ce tableau est statistique mais (les problèmes sont souvent présentés ainsi) si j'ai **21 %** de pièces venant de A et avec défaut, je pourrais en conclure que si je prends une pièce au hasard, $p(A \cap D) = \mathbf{21\%}$.

P5 Arbre**P2**

Avec un exemple : Une personne prise au hasard est malade (M) ou pas ($\overline{M}$). On lui fait passer un test qui répond positif (P) ou négatif (N).

- On estime qu'il y a **15 %** de malades,
- le test répond positif avec un taux de **90 %** si le testé est vraiment malade,
- sinon, le test répond positif avec un taux de **20 %**.



Quelques règles :

- Les branches partant d'un nœuds doivent former une **partition** (c'est à dire que dans toutes situations envisageables, on ne doit prendre un chemin et un seul)
- Les % sont toujours donnés par rapport au nœud précédent. Le premier nœud étant Ω , il représente l'ensemble.
- La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud doit toujours faire 100 %.

Une fois l'arbre fait, on peut calculer les probabilités.

- probabilité pour un chemin = produit des probabilités du chemin.

$$p(M \cap P) = 15 \% \times 90 \% = 13,5 \%$$

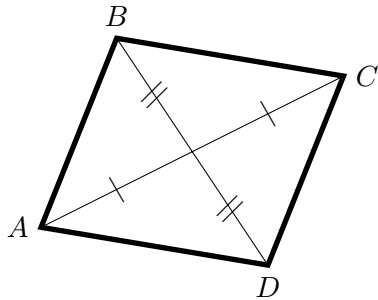
- probabilité pour plusieurs chemins = somme des probabilités des chemins

$$p(P) = 15 \% \times 90 \% + 85 \% \times 20 \% = 30,5 \%$$

P6 Intervalle de fluctuation**E10** **P2**

Géométrie

G1 Parallélogramme



$ABCD$ est un parallélogramme

$\Leftrightarrow$ Les côtés opposés sont parallèles

$\Leftrightarrow$ Les côtés opposés sont de même longueur

$\Leftrightarrow$ Les diagonales se coupent en leur milieu

On accepte le cas où le parallélogramme est tout aplati.

G2 Rappels : Thalès et Pythagore

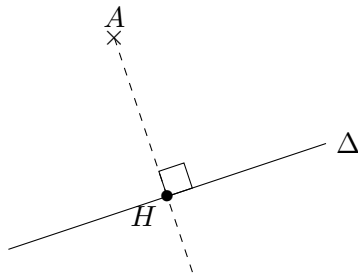
Voir TD

G3 Relations d'angles

G2

Voir TD

G4 Projeté orthogonal



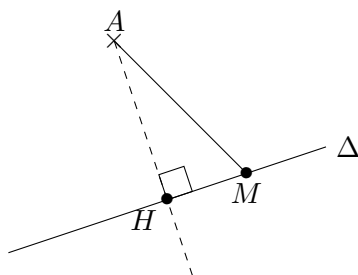
Soit Δ et A une droite et un point du plan.

- Par A on amène la **perpendiculaire** à Δ ,
- cette perpendiculaire coupe Δ en H .

H est le **projeté orthogonal** de A sur Δ .

G4p Distance point-droite

G2 G4



H projeté orthogonal de A sur Δ est le point de Δ le plus proche de A .

Autrement dit : $\forall M \in \Delta, AM \geq AH$.

AH est la distance entre A et Δ .

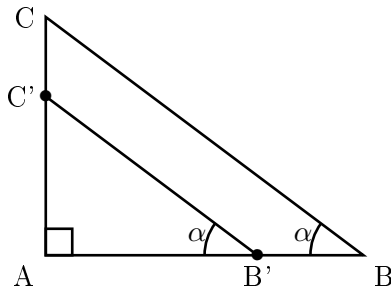
Soit $M \in \Delta$. Puisque H est le projeté orthogonal de A sur Δ alors AHM rectangle en H et d'après Pythagore :

$$AM^2 = AH^2 + HM^2 \geq AH^2 \Rightarrow AM \geq AH$$

L'égalité n'est obtenue que quand $HM^2 = 0$, donc quand $H = M$.

G5 Fonctions trigonométrique**G2 G3**

Prenons deux triangles rectangles semblables (leurs angles sont les mêmes mais ils sont plus ou moins grands)



On peut les superposer en calant leur angles droit comme sur la figure. Comme ils sont semblables, on a des angles égaux comme l'angle α en B et en B' . Alors on a des droites parallèles : ici $(B'C') \parallel (BC)$. Le théorème de Thalès s'applique.

$$\text{par ex. } \frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$$

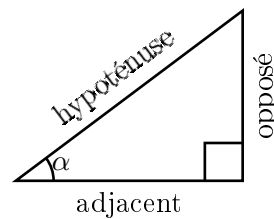
Autrement dit, le rapport entre le **côté adjacent** à α et l'**hypoténuse** ne **dépend pas** de la taille du triangle !

Ce rapport ne dépend que l'angle α . On peut donc définir :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$



Il s'agit d'une définition collège. Dans cette définition, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Les cos, sin et tan étant des rapports de longueur, ils sont toujours positifs. Vous verrez plus tard quelques modifications permettant de généraliser ces notions :

- vous utiliserez les radians plutôt que les degrés,
- vous autoriserez des angles quelconques, y compris négatifs,
- les cos, sin et tan deviendront des rapports de valeurs algébriques (avec signe) donc pourront être négatifs.

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Comprendre $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$

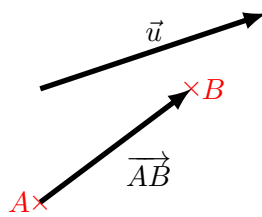
$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= \left(\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \right)^2 + \left(\frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \right)^2 \\ &= \frac{\text{adjacent}^2}{\text{hypoténuse}^2} + \frac{\text{opposé}^2}{\text{hypoténuse}^2} \\ &= \frac{\text{adjacent}^2 + \text{opposé}^2}{\text{hypoténuse}^2} \\ &= \frac{\text{hypoténuse}^2}{\text{hypoténuse}^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

G6 ?	Al-Kashi...	G5

Vecteurs

V1 Définition

G1

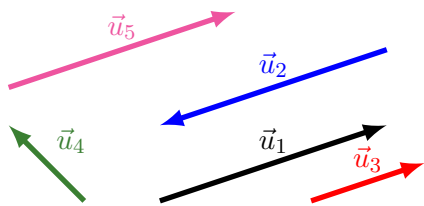


Un **vecteur** est une **flèche** caractérisée par

- une longueur appelée **norme**,
- une inclinaison appelée **direction**
- un **sens**.

On lui donne un nom, par exemple $\vec{u}$.

Un vecteur peut être définie par son **origine** (ex. A) et son **extrémité** (ex. B). On le note ici $\overrightarrow{AB}$.

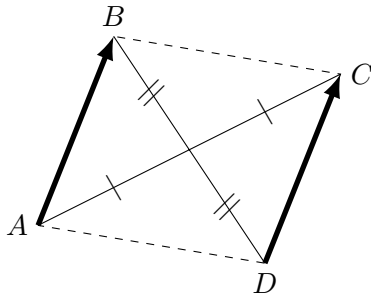


- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ont même norme, même direction mais un sens opposé.
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ ont même sens, même direction mais pas la même norme.
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_4$ n'ont rien en commun.
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_5$ ont même norme, direction et sens. Ils sont **égaux** : $\vec{u}_1 = \vec{u}_5$.

Il faut comprendre que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_5$ sont deux réalisations d'un seul et même vecteur.

V2 Égalité de vecteurs

V1



Deux vecteurs sont égaux quand ils ont même **norme**, même **direction** et même **sens**

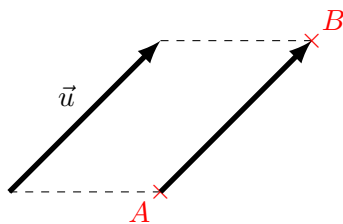
$ABCD$ est un parallélogramme
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On accepte le cas où le parallélogramme est tout aplati.

V3 Translation

V2

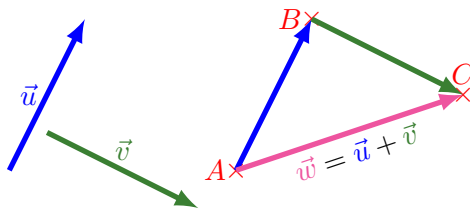
La flèche du vecteur peut être comprise comme un **déplacement**.



B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

On pourra noter $T_{\vec{u}}$ cette translation et $T_{\vec{u}}(A) = B$.

V4 Somme**V3**

- B image de A par $T_{\vec{u}}$,
- C image de B par $T_{\vec{v}}$,
- On dira que C image de A par $T_{\vec{u}+\vec{v}}$
On définit ainsi $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Intuitivement, $\vec{w}$ est obtenu en mettant bout à bout $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Loi de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

V5 Opposé et vecteur nul**V4**

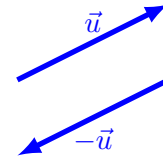
On note $\vec{0}$ le vecteur de **norme nulle**. Il n'a donc ni sens ni direction et il correspond à la translation qui ne change rien.

D'après Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$.

$\overrightarrow{AA}$ est un vecteur de norme $AA = 0$, c'est donc $\vec{0}$.

On a donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Il paraît alors naturel de noter :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$



$-\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$, de même norme, même direction et de **sens opposé**.

V6 Multiplication par un réel**V5** **C4**

On note $k\vec{u}$ le vecteur :

- de norme $|k| \times$ la norme de $\vec{u}$,
- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens si $k > 0$, de sens opposé sinon.

Si $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Remarque : Il faudrait prouver que cette définition est cohérente avec l'usage que l'on souhaite en faire. Par exemple, il faudrait prouver que si on fait $\vec{u} + \vec{u}$ on obtient bien $2\vec{u}$, c'est à dire un vecteur de même direction que $\vec{u}$, de même sens et deux fois plus long.

Bien qu'on ne fera pas cette démonstration, on peut dire qu'elle repose sur l'utilisation du théorème de Thalès. En géométrie élémentaire, quand il s'agit de parallélisme, on en revient toujours à Thalès.

V7 Colinéarité**V6**

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ on peut écrire soit $\vec{u} = k\vec{v}$ soit $\vec{v} = k\vec{u}$ pour un certain réel k .

Pour mieux comprendre l'idée de cette définition :

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les autres car pour tout $\vec{u}$, on peut écrire $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$.
- En général, si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors $\vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$. On peut donc passer de l'un à l'autre et on ne voit pas pourquoi la définition le dit de façon si compliquée.

Le problème vient du cas où un des vecteurs est nul. Par exemple, si $\vec{v} = \vec{0}$ on peut écrire $\vec{v} = 0 \cdot \vec{u}$ mais on ne peut pas renverser l'égalité.

- La colinéarité contient l'idée de parallélisme mais appliquée à des vecteurs. Ce n'est pas tout à fait la même chose car le vecteur peut être nul et cela n'a aucun sens d'être « parallèle » à un vecteur nul

Ce dernier point n'a pas besoin d'être démontré car il relève de la définition de ce que c'est que de faire $k\vec{u}$ (voir **V5**)

V8 Alignement et parallélisme**V7**

$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et non nuls.

En effet, l'existence des droites supposent que $A \neq B$ et $C \neq D$, donc $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ (et réciproquement). Le problème de points confondus étant éliminé, la propriété repose sur la définition de la colinéarité : les deux vecteurs ont même direction ce qui veut dire qu'ils reposent sur des droites parallèles.

A, B et C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve :

- Premier cas : deux des points, par exemple A et B , sont confondus. Dans ce cas on a forcément A, B et C alignés. De plus, $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ donc le vecteur est forcément colinéaire à $\overrightarrow{AC}$. La propriété est donc bien vérifiée.
- Deuxième cas : les points sont distincts. Alors les deux vecteurs sont non nuls et les droites (AB) et (AC) sont bien définies.

La propriété précédente nous permet de dire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} &\Leftrightarrow (AB) \parallel (AC) \\ &\Leftrightarrow (AB) = (AC) \text{ (parallèles avec } A \text{ en commun)} \\ &\Leftrightarrow A, B \text{ et } C \text{ alignés.} \end{aligned}$$

Géométrie dans un repère

R1 Repère du plan

V7

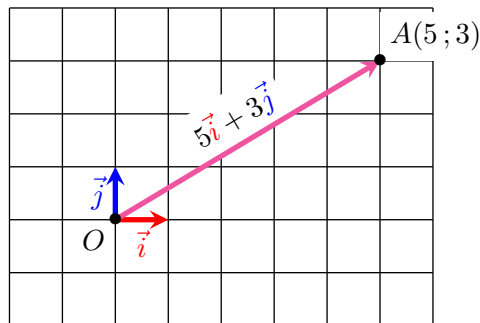
Un repère du plan est donné par un point O et deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **non colinéaires**.

On note le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On **admettra** que pour tout point A du plan, on peut trouver une unique paire de réels $(x; y)$ tels que :

$$\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$$



On appelle **coordonnées** de A cette paire $(x; y)$.

$$A(x; y) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

$A(5; 3)$ signifie : « A a les coordonnées $(5; 3)$ »

Si on est dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cela veut dire $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$.

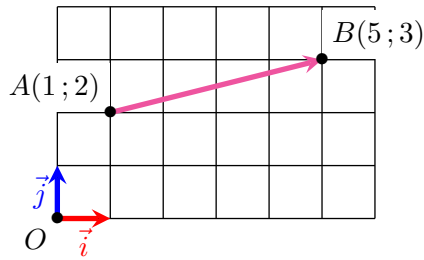
- La coordonnée x est l'**abscisse**,
- La coordonnée y est l'**ordonnée**.

R2 Coordonnées et vecteurs**R1**

On note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur $\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. **▲** on note les coordonnées en colonne.

Vecteur entre deux points

$$A(x_A; y_A) \text{ et } B(x_B; y_B) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

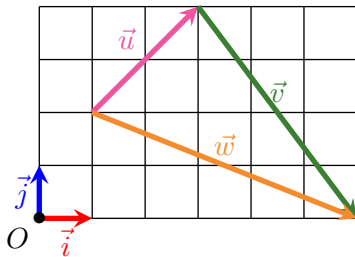


$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Coordonnées d'une somme de vecteur

Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on a :

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

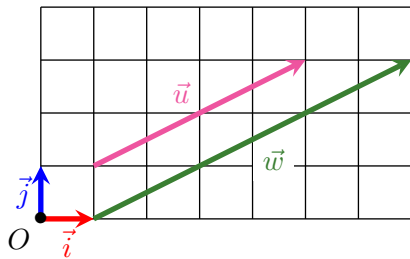


$$\begin{aligned} \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} &= \vec{w} \begin{pmatrix} 2 + 3 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= \vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a :

$$\vec{w} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \vec{w} \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$



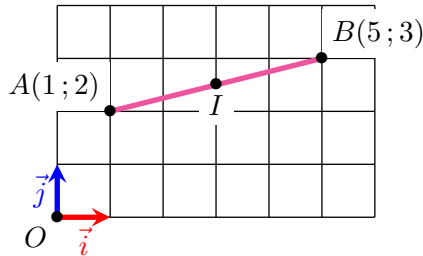
Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = 1,5\vec{u}$

$$\text{Alors } \vec{w} \begin{pmatrix} 1,5 \times 4 \\ 1,5 \times 2 \end{pmatrix} = \vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Remarque : La notation pose beaucoup de difficultés... Si j'écris par exemple $1,5\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, les coordonnées sont-elles les coordonnées de $\vec{u}$ ou les coordonnées de $1,5\vec{u}$? On essaie de contourner le problème : ici j'ai nommé $\vec{w} = 1,5\vec{u}$ puis j'ai donné les coordonnées de $\vec{w}$.

R3 Milieu**R2** **V8**

$$I \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



$$\begin{aligned} I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) &= I \left(\frac{1 + 5}{2}; \frac{2 + 3}{2} \right) \\ &= I(3; 2,5) \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on sait que $\overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} I \text{ milieu de } [AB] &\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ \frac{1}{2}(y_B - y_A) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x_I - x_A = \frac{1}{2}(x_B - x_A) \text{ ET } y_I - y_A = \frac{1}{2}(y_B - y_A) \\ &\Leftrightarrow x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_A) \text{ ET } y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_A) \end{aligned}$$

R4 Déterminant de deux vecteurs**R2 V7**

Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$$

Le déterminant permet de vérifier facilement la **colinéarité** de deux vecteurs.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

On sait que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires quand on peut écrire $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ou bien dans l'autre sens $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$. Autrement dit, la colinéarité correspond au cas où les vecteurs ont des **coordonnées proportionnelles**, ce qui correspond géométriquement à une situation de théorème de Thalès.

Prenons les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 399 \\ 231 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 247 \\ 143 \end{pmatrix}$. Sont ils colinéaires ? Dit autrement, ce

tableau est-il un tableau de proportionnalité :

x	399	247
y	231	143

Le déterminant permet de répondre :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 399 & 247 \\ 231 & 143 \end{vmatrix} = 399 \cdot 143 - 247 \cdot 231 = 0$$

Oui, ils sont donc colinéaires.

R5 Équation cartésienne de droite**R2** **V8**

Une bonne écriture de la démonstration requiert **L2**

Une droite est constituée de points. Ces points ont des coordonnées $(x; y)$. Une équation de droite est une équation faisant intervenir x et y et qui est vérifiée par tous les points de la droite et pour aucun autre.

Une équation de droite dans un repère peut toujours se mettre sous la forme **cartésienne** :

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}; (a; b) \neq (0; 0)$$

Remarque : Une même droite peut avoir une infinité d'équations, toutes équivalentes. Par exemple :

$$2x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -3x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x + 4y - 2 = x^3 + 3y$$

Une équation cartésienne est une équation sous une **forme standardisée**.

Considérons une droite (Δ) . On considère $M(x; y)$ et on souhaite traduire l'affirmation $M \in (\Delta)$ par une égalité portant sur x et y . On sait que l'on pourra toujours trouver deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur cette droite de sorte que $(\Delta) = (AB)$.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (\Delta) &\Leftrightarrow M, A, B \text{ alignés} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_A) \cdot (y_B - y_A) - (y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overbrace{(y_B - y_A) \cdot x}^a + \overbrace{(x_B - x_A) \cdot y}^b + \overbrace{\dots}^c = 0 \end{aligned}$$

$A(2; 5)$ et $B(7; 1)$. L'équation de (AB) est

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & 5 \\ y - 5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3) \cdot (-4) - (y - 5) \cdot 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x + 8 - 5y + 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x - 5y + 33 = 0 \end{aligned}$$

▲ une droite n'a pas une seule équation cartésienne !

Exemple, si $(\Delta) : 2x + 3y + 1 = 0$, on peut tout multiplier par 2 :

$(\Delta) : 4x + 6y + 2 = 0$, c'est toujours la même droite.

Obtenir directement l'équation réduite.

R6 Appartenance à une droite**R5**

$$(\Delta) : x + 2y - 3 = 0$$

- Le point $O(0;0)$ appartient-il à (Δ) ?

$$0 + 2 \times 0 - 3 \neq 0 \Rightarrow O \notin (\Delta)$$

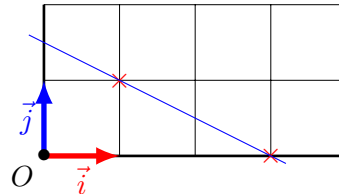
- Le point $C(5;-1)$ est-il sur (Δ) ?

$$5 + 2 \times (-1) - 3 = 0 \Rightarrow C \in (\Delta)$$

On souhaite trouver des points appartenant à une droite, pour la tracer par exemple. Pour cela, on peut remplir un tableau de valeurs en choisissant arbitrairement la valeur de x ou de y et en calculant l'autre.

x	3	1
y	0	1

Deux points suffisent pour tracer une droite, mais c'est mieux s'ils sont bien écartés.

**R7** Vecteur directeur d'une droite**R6**

$\vec{u}$ est directeur de $(\Delta) \Leftrightarrow$ on peut trouver deux points A et B distincts sur (Δ) tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

$$(\Delta) : x + 2y - 3 = 0$$

Les points de coordonnées $A(1;1)$ et $B(3;0)$ sont sur la droite (exemple **R6**). Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est donc directeur de la droite.

Si $\vec{u}$ est directeur de (Δ) , tous les $k\vec{u}$, $k \neq 0$ le sont également.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) d'équation $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

$$(\Delta) : 3x + 8y - 1 = 0$$

$\vec{u} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ est directeur de (Δ) .

R8 Équation réduite de droite**R5**

C'est une façon plus légère d'écrire l'équation d'une droite. Cela consiste à reformuler l'équation en $y = \dots$, ou bien, si ce n'est pas possible, en $x = \dots$. Cette écriture est unique (une droite a **une seule** équation réduite).

- $(\Delta_1) : 3x + 2y - 5 = 0$

On isole le y pour obtenir une écriture $y = \dots$

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5 = 0 &\Leftrightarrow 2y = -3x + 5 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

C'est l'équation réduite de (Δ_1) .

- $(\Delta_2) : 2x + 8 = 0$

Cette fois on ne peut pas isoler y qui est absent, alors on isole $x = \dots$

$$\begin{aligned} 2x + 8 = 0 &\Leftrightarrow 2x = -8 \\ &\Leftrightarrow x = -4 \end{aligned}$$

C'est l'équation réduite de (Δ_2) .

Dans le premier cas, l'équation a la forme $y = m \cdot x + p$.

- m est appelé **coefficient directeur** et décide de l'inclinaison de la droite.
- p est appelé **ordonnée à l'origine** et décide de l'endroit où la droite coupe l'axe (Oy) .

C'est très simple dans l'autre sens : Si l'équation réduite est $(\Delta) : y = x + 1$, on obtient **une** équation cartésienne en passant tous les termes du même côté :

$$(\Delta) : y = x + 1 \Leftrightarrow (\Delta) : -x + y - 1 = 0$$

R9 Équation réduite d'une droite passant par 2 points**R8**

On se donne deux points distincts $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et on cherche l'équation réduite de la droite (AB) .

On pourrait chercher une équation cartésienne selon **R5** puis passer à la forme réduite comme en **R8** mais il y a plus rapide.

- **Cas simple** : $x_A = x_B$. Dans ce cas l'équation réduite est simplement $x = x_A$. Il s'agit d'une droite $//$ à l'axe (Oy) (donc verticale en général)
- **Cas le plus courant** : $x_A \neq x_B$.

a) On calcule le **coefficient directeur** $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

b) Dans l'écriture $y = m \cdot x + p$ on remplace x et y par les coordonnées de A et m par la valeur calculée précédemment. On obtient p .

$A(8; 3)$ et $B(8; 1)$.

On voit que $x_A = x_B = 8$, l'équation est donc $(AB) : x = 8$.

$C(2; 3)$ et $D(8; 1)$. Cette fois, $x_C \neq x_D$.

a)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \\ &= \frac{1 - 3}{8 - 2} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) au point C :

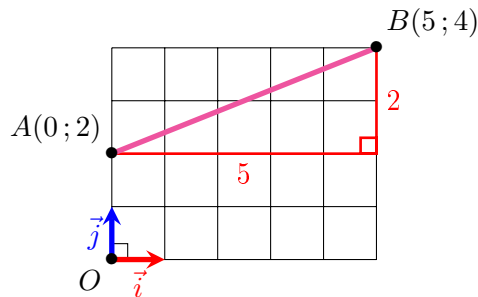
$$\begin{aligned} y_C &= m \cdot x_C + p \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{3} \times 2 + p \\ &\Leftrightarrow 3 + \frac{2}{3} = p \\ &\Leftrightarrow \frac{11}{3} = p \end{aligned}$$

Conclusion : $(DC) : y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

R10 Distance dans un repère orthonormé**R2** **G2**

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé $\Leftrightarrow$

- les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment un angle droit,
- les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont la même norme qui sert d'unité : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.



Pour calculer la distance $AB = \|\vec{AB}\|$, on reconnaît une situation de **théorème de Pythagore**.

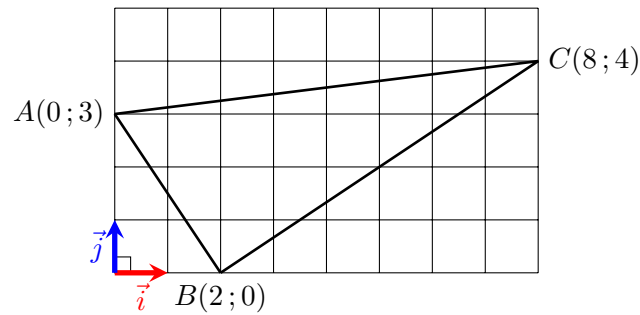
$$AB^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow AB = \sqrt{5^2 + 2^2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$A(0; 2)$ et $B(5; 4)$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(5 - 0)^2 + (4 - 2)^2} \\ &= \sqrt{25 + 4} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

⚠ Ne pas approximer si pas demandé !

R11 Démontrer qu'un angle est droit (rep. orthonormé)**R10** **G2**

Peut-on dire $(AB) \perp (BC)$? **Méthode :**

a) Calculer les longueurs des côtés du triangle.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

b) Utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque (qui forment ensemble une équivalence $\Leftrightarrow$)

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 &= 13 + 52 \\ &= 65 \\ AB^2 + BC^2 &= AC^2 \end{aligned}$$

ABC est donc rectangle en B et donc $(AB) \perp (BC)$.

Remarque : La réciproque du théorème de Pythagore dit exactement cela :

$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow ABC$ rectangle en B . C'est cela que l'on a utilisé.

Mais si on avait abouti à $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ on n'aurait pas pu conclure avec la réciproque. Il faut utiliser **la contraposée** **L3** du théorème de Pythagore, c'est à dire :

- Th. Pythagore : ABC rectangle en $B \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$
- Contraposée : $AB^2 + BC^2 \neq AC^2 \Rightarrow ABC$ pas rectangle en B

Mais comme le théorème $\Rightarrow$ et sa réciproque $\Leftarrow$ forment une équivalence $\Leftrightarrow$, on pourrait écrire globalement :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow ABC \text{ rectangle en } B$$

Et alors c'est plus simple puisque $\Leftrightarrow$ fonctionne comme un $=$ logique.

R12 Système d'équation et intersection de droites**R5** **AL6**

Considérons deux droites : $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$.

Si ces droites ne sont pas parallèles, alors elles ont un point d'intersection $M = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.
Les coordonnées de M sont solutions du système :

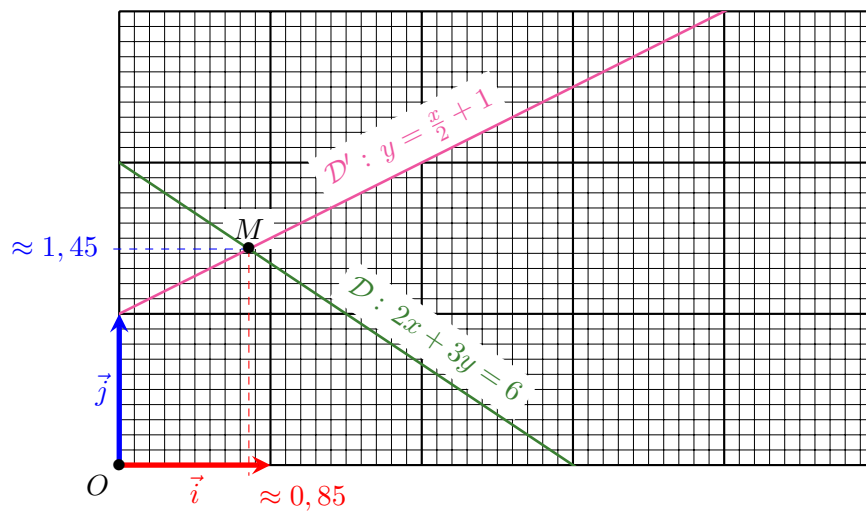
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

On peut donc trouver les solutions de système en lisant graphiquement les coordonnées de l'intersection.

Prenons le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = \frac{x}{2} + 1 \end{cases}$$

Les deux équations sont des équations de droites que l'on peut tracer.



On peut lire, approximativement, $x \approx 0,85$ et $y \approx 1,45$.

R13p Norme d'un vecteur**R10**

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La norme de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

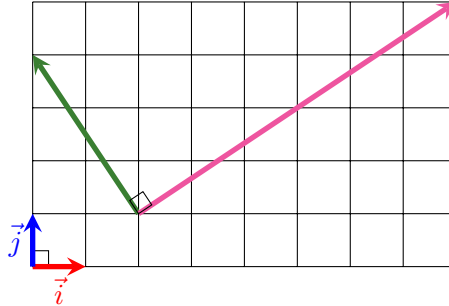
Prenons $A(x_A; y_A)$ et B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a donc $B(x_A + x; y_A + y)$ et donc :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

R14p Vecteurs orthogonaux

R13p **R11**

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ orthogonaux } \Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0$$



Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. En effet $-2 \times 6 + 3 \times 4 = 0$.

Prenons deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Soit A un point et B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

$$AB = \|\vec{AB}\| = \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Soit C l'image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$.

$$AC = \|\vec{AC}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

On a donc $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$ et donc

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \Rightarrow BC = \|\vec{BC}\| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

D'après Pythagore, ABC rectangle en A

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Leftrightarrow (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$$

$$\Leftrightarrow x'^2 - 2x \cdot x' + x^2 + y'^2 - 2y \cdot y' + y^2 = x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2$$

$$\Leftrightarrow -2x \cdot x' - 2y \cdot y' = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot x' + y \cdot y' = 0$$

Remarque : Il s'en suit que $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs.

R15p Droites perpendiculaires**R14p**

Soient deux droites $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$.

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow a \cdot a' + b \cdot b' = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \perp \mathcal{D}' &\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} \text{ orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow (-b) \cdot (-b') + a \cdot a' = 0 \\ &\Leftrightarrow a \cdot a' + b \cdot b' = 0 \end{aligned}$$

Soient deux droites $\mathcal{D} : y = mx + p$ et $\mathcal{D}' : y = m'x + p'$.

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow m \cdot m' = -1$$

$$\mathcal{D} : y = mx + p \Leftrightarrow -mx + y - p = 0$$

$$\mathcal{D}' : y = m'x + p' \Leftrightarrow -m'x + y - p' = 0$$

Et donc

$$\mathcal{D} \perp \mathcal{D}' \Leftrightarrow (-m) \cdot (-m') + 1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m \cdot m' = -1$$

Il y a une différence entre **perpendiculaire** et **orthogonal**.

- Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Donc cela porte sur la direction. Ainsi le bord d'une table et le montant de la porte sont orthogonaux car le premier est horizontal et le second est vertical. On peut imaginer déplacer parallèlement le montant de la porte pour l'amener sur le bord de la table et mettre une équerre.
- Deux droites sont perpendiculaires si elles ont **un point d'intersection** et forment un angle un angle droit en ce point.

Le bord de la table et le montant de la porte ne se coupent pas, ils ne sont donc pas perpendiculaires.

Autrement dit, perpendiculaire = orthogonal avec intersection.

Donc : $\mathcal{D}_1$ orthogonale à $\mathcal{D}_2 \Rightarrow \mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$,

mais la réciproque est fausse !

J'ai utilisé un exemple dans l'espace (bord de table, montant de porte) car la différence entre orthogonal et perpendiculaire n'apparaît qu'en dimension 3 ou plus. Si on se limite à la dimension 2 (c'est à dire au plan) deux droites orthogonales ont forcément un point d'intersection et sont donc perpendiculaires. Donc, dans le plan, les deux notions sont équivalentes.

R16p **Projeté orthogonal dans un repère****R15p** **G4**

Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite et $A(x_A; y_A)$ un point. On souhaite construire H , un point de $\mathcal{D}$, tel que $(AH) \perp \mathcal{D}$.

Dans le cas particulier où $A \in \mathcal{D}$, alors $H = A$.

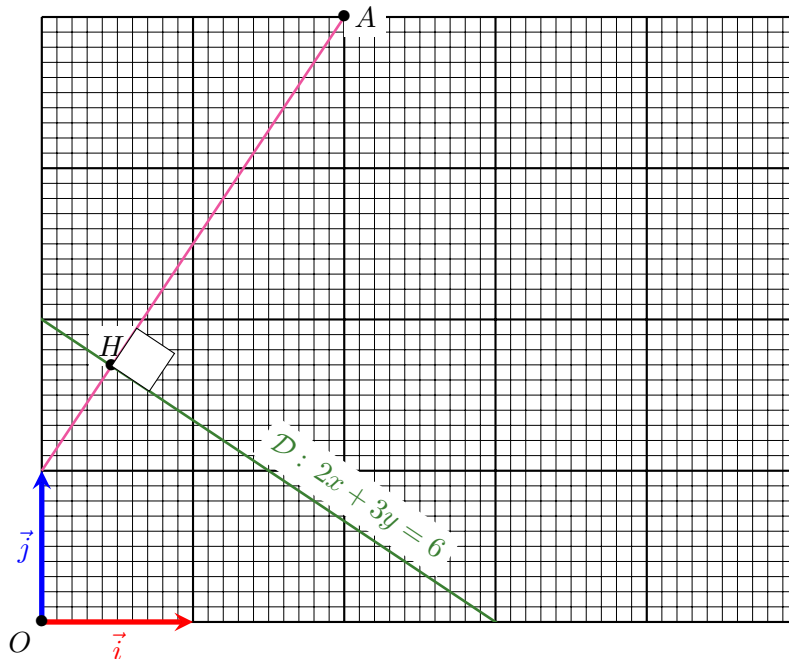
Pour cela, on construit la droite $\mathcal{D}'$ passant par A et $\perp \mathcal{D}$ puis on calcule $H = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

On prend $\mathcal{D} : 2x + 3y - 6 = 0$ et $A(2; 4)$.

- $\mathcal{D}' \perp \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}' : -3x + 2y + c' = 0$
- $A \in \mathcal{D}' \Rightarrow -3 \times 2 + 2 \times 4 + c' = 0 \Rightarrow c' = -2$
Donc $\mathcal{D}' : -3x + 2y - 2 = 0$

- Résolution de $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ -3x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$

On trouve $x = \frac{6}{13}$ et $y = \frac{22}{13}$ donc $H\left(\frac{6}{13}; \frac{22}{13}\right)$.



On peut généraliser :

- $\mathcal{D}'$ a une équation $-bx + ay + c' = 0$
- $A \in \mathcal{D}'$ donc $-bx_A + ay_A + c' = 0 \Rightarrow c' = bx_A - ay_A$. On a donc :

$$\mathcal{D}' : -bx + ay + bx_A - ay_A = 0$$

- En faisant $b \cdot \mathcal{D} + a \cdot \mathcal{D}'$ on obtient :

$$(a^2 + b^2) y + cb + abx_A - a^2 y_A = 0 \Rightarrow y = \frac{a^2 y_A - abx_A - bc}{a^2 + b^2}$$

- En faisant $a \cdot \mathcal{D} - b \cdot \mathcal{D}'$ on obtient :

$$(a^2 + b^2) x + ac - b^2 x_A + aby_A = 0 \Rightarrow x = \frac{b^2 x_A - aby_A - ac}{a^2 + b^2}$$

Ces formules sont un peu compliquées mais elles permettent de trouver directement les coordonnées de H .

R17p**Distance d'un point à une droite dans un repère****R16p****G4p**

$A(x_A, y_A)$ un point d'un repère orthonormé et $\Delta : ax + by + c = 0$ une droite. La distance entre A et Δ est :

$$\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

En reprenant **R16p** on obtient les coordonnées de H :

$$x_H = \frac{b^2 x_A - aby_A - ac}{a^2 + b^2} \quad ; \quad y_H = \frac{a^2 y_A - abx_A - bc}{a^2 + b^2}$$

Commençons par calculer :

$$\begin{aligned} x_H - x_A &= \frac{b^2 x_A - aby_A - ac}{a^2 + b^2} - x_A \\ &= \frac{b^2 x_A - aby_A - ac - (a^2 + b^2) x_A}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{-a^2 x_A - aby_A - ac}{a^2 + b^2} \\ &= -a \cdot \frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} y_H - y_A &= \frac{a^2 y_A - abx_A - bc}{a^2 + b^2} - y_A \\ &= \frac{a^2 y_A - abx_A - bc - (a^2 + b^2) y_A}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{-b^2 x_A - abx_A - bc}{a^2 + b^2} \\ &= -b \cdot \frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} AH^2 &= (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 \\ &= a^2 \cdot \left(\frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2} \right)^2 + b^2 \cdot \left(\frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2} \right)^2 \\ &= (a^2 + b^2) \cdot \frac{(ax_A + by_A + c)^2}{(a^2 + b^2)^2} \\ &= \frac{(ax_A + by_A + c)^2}{(a^2 + b^2)} \\ AH &= \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Démonstrations / Exercices

E6* Nombres de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{D}$

E3 E5 A6

Prenons x dans $\mathbb{D}$ et dans $\mathbb{Q}$.

- Justifier que $x = \frac{p}{q}$. On peut supposer que cette écriture est irréductible, c'est à dire que p et q n'ont aucun facteur premier en commun.
- Justifier que $x = \frac{a}{10^n}$
- En déduire que $q \times a = p \times 10^n$
- En déduire que q ne peut avoir comme facteurs premiers que 2 et 5.
- En déduire qu'il existe des nombres de $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{D}$.

E8* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

E5 E7 A5 A6 L6

On raisonne par l'absurde en supposant $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

- Justifier que l'on peut écrire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On peut supposer cette écriture irréductible, c'est à dire que p et q n'ont aucun facteur premier en commun.
- En déduire que $p^2 = 2q^2$.
- En déduire que p est pair.
- En déduire que q doit être pair également.
- En déduire qu'il y a contradiction.
- Conclure.

De façon générale on peut prouver que les nombres de $\mathbb{Q}$ sont ceux dont l'écriture décimale est périodique à partir d'un certain point. Donc, les nombres de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ sont ceux dont l'écriture n'est jamais périodique. L'écriture de $\sqrt{2}$ tout comme celle de π , est infinie et ne se répète pas.

C5* Existence et unicité de $\sqrt{A}$

FR2

Répondez en observant le tableau de variations de x^2 FR2.

Dans les différents cas, combien l'équation $x^2 = A$ a de solution appartenant à $\mathbb{R}^+$?

- $A < 0$
- $A = 0$
- $A > 0$.

On peut conclure que pour $A \geq 0$ il y a toujours exactement une solution ≥ 0 à $x^2 = A$.

C6* Manipulations de $\sqrt{a}$

C5

Soit a et b deux nombres positifs.

- Comparer $(\sqrt{a \cdot b})^2$ et $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$. Conclure.
- Avec $b \neq 0$, comparer $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ et $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$. Conclure.