

Démonstration – Euclide – TD

Dans ce TD on veut démontrer des propriétés un peu à la façon d'Euclide.

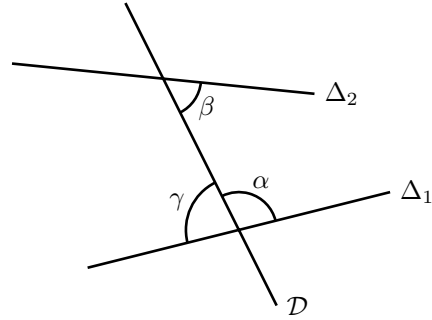
Pour les angles, Euclide n'utilise pas les degrés. Il parle relativement à l'angle droit.

Ainsi (**Def**) il nous dit « quand une droite $\mathcal{D}$ tombe sur une droite Δ_1 , elle forme deux angles γ et α dont la somme est de deux droits. »

Et aussi (**Axiome**) : « si deux droites Δ_1 et Δ_2 tombent sur une droite $\mathcal{D}$ en faisant les angles β et α dont la somme est inférieure à deux droits, alors elles (Δ_1 et Δ_2) sont sécantes (donc non parallèles). »

On dirait aujourd'hui 90° pour l'angle droit et 180° pour la somme de deux droits.

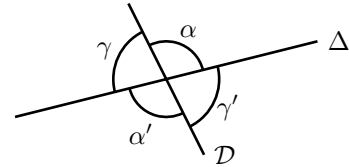
Nous allons utiliser cette définition et cet axiome dans la suite.



Théorème 1

On considère les angles formés par l'intersection de Δ et $\mathcal{D}$.

- Justifiez que $\gamma + \alpha = 180^\circ$.
- Justifiez que $\gamma + \alpha' = 180^\circ$.
- Concluez sur la relation entre α et α' .



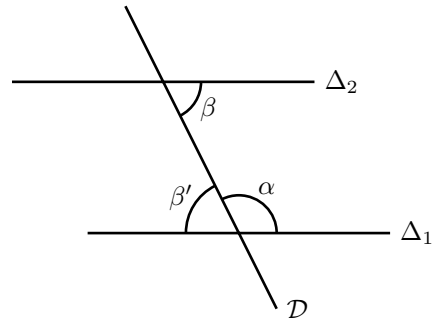
Théorème 1 : Les angles opposés sont égaux.

Théorème 2

Une droite $\mathcal{D}$ coupe deux droites **parallèles** Δ_1 et Δ_2 formant les angles α , β et β' .

On souhaite prouver que $\beta' = \beta$.

- Supposons $\beta' > \beta$.
Montrez alors que $\beta + \alpha < 180^\circ$.
- Justifiez qu'il y a alors contradiction.
Pensez à l'axiome.
- On aboutirait à la même contradiction si on supposait $\beta' < \beta$. Concluez.

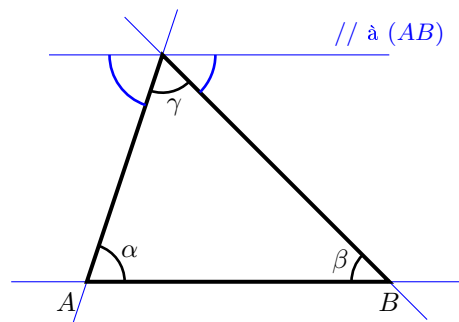


Théorème 2 : Les angles alternes - internes sont égaux.

Théorème 3

On considère le triangle ci-contre.

- À quel autre angle de la figure est égal α ?
Citez le théorème utilisé.
- À quel autre angle de la figure est égal β ?
- Concluez quant à la valeur de $\alpha + \beta + \gamma$.

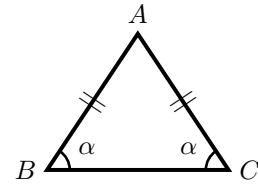


Théorème 3 : La somme des angles d'un triangle est de 180° .

Théorème 4

Dans un triangle isocèle, les angles formés par les côtés égaux avec le troisième côté sont égaux.

Preuve : les triangles (ABC) et (ACB) ont des côtés de même longueur, sont donc isométriques et donc $\hat{B} = \hat{C}$. La démonstration d'Euclide est plus laborieuse mais revient au même.

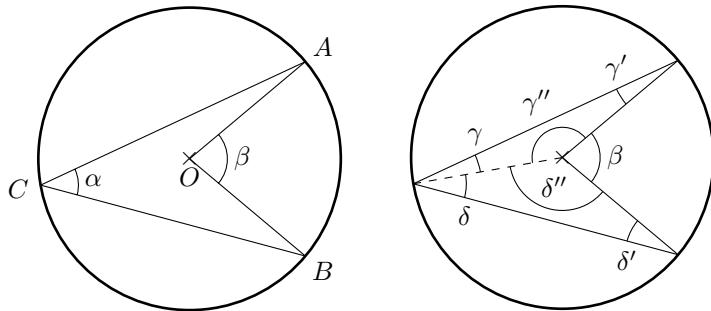


Définition : Un cercle de rayon R et de centre O est l'ensemble des points du plan à distance R du point O .

Théorème 5

On considère le cercle de centre O . A, B, C des points du cercle.

$\widehat{BOA} = \beta$ et $\widehat{BCA} = \alpha$.



La seconde figure sert à appuyer la démonstration sans surcharger la première.

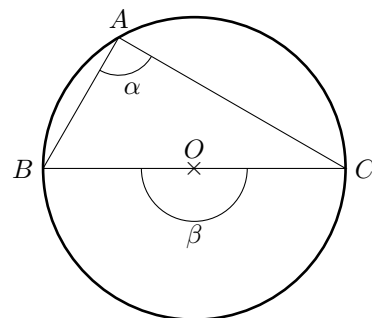
- Que valent $\delta + \delta' + \delta''$ et $\gamma + \gamma' + \gamma''$?
- Que vaut $\beta + \gamma'' + \delta''$?
- Que peut-on dire de γ' et γ ; de δ' et δ ?
- En utilisant toutes ces égalités, montrez que $2\gamma + 2\delta = \beta$.
Conclure sur le lien entre α et β .

Remarque : La réciproque est vraie également.

Théorème 6

A, B et C sont trois points du cercle de diamètre $[BC]$. Le centre du cercle est donc O , milieu de $[BC]$.

- Quelle est la mesure de l'angle β ?
- En déduire la mesure de l'angle α .
Justifier.
- Conclure sur la nature du triangle ABC .

**Théorème 7**

Les points A, A', B, B' sont sur le cercle.
 (AA') et (BB') se coupent en O .
 $a = OA, a' = OA', b = OB$ et $b' = OB'$.

- Justifier que $\widehat{AOB'} = \widehat{BOA'}$
- Justifier que $\widehat{OAB'} = \widehat{OBA'}$
- En déduire que l'on peut utiliser le théorème de Thalès entre OAB' et OBA' .
- Conclure que $a \cdot a' = b \cdot b'$.

