

Exponentielle de base a – Pour quoi faire ?

On se propose ici de présenter sommairement la fonction « exponentielle de base a » et de justifier pourquoi on a besoin.

Situation exemple

On injecte un médicament dans le sang d'un patient. Au moment de l'injection, la concentration du médicament est de $1\,000\,\mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$. On sait que en un jour, 80 % du médicament restant disparaît.

Nous souhaitons faire des prédictions sur la concentration de médicament dans les heures et jours à venir.

au besoin, arrondir à 1 près.

I. Suite

On reconnaît une situation relevant d'une suite.

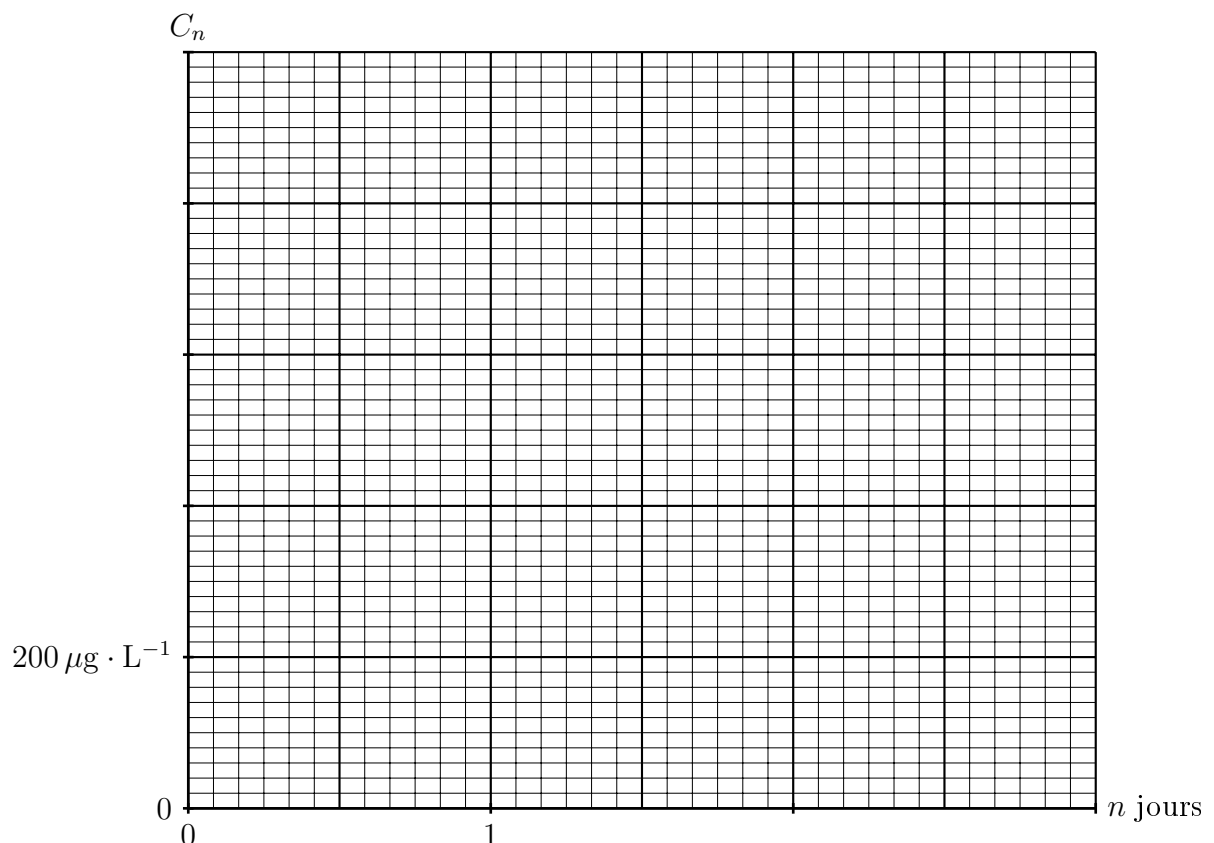
Soit C_n la concentration de médicament encore présent dans le sang du patient, exprimée en $\mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$, au bout de n jours.

- Que valent C_0 et C_1 .
- Justifier que $(C_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique.

Vous donnerez l'expression du terme général de cette suite.

On note q la raison de cette suite ce qui nous servira en dernière partie.

- Utilisez ce terme général pour calculer C_2 .
- Complétez le graphique par le nuage de point représentant la suite.



II. Affiner le pas de temps

Notre modèle ne nous permet de prévoir la concentration de médicament que avec un pas de temps de 1 jour. On aimerait pouvoir prédire par exemple la quantité de médicament restant au bout d'une demi-journée après l'injection.

- a) Supposons qu'on utilise le modèle précédent pour calculer la concentration de médicament 12 heures après l'injection.

Quelle serait la bonne valeur ?

- b) Placez cette valeur sur le graphique.

Vous pouvez constater que cette valeur a quelque chose de naturel (suit la forme courbe qu'il faudrait tracer pour passer par tous les points).

Cette valeur correspond à la concentration au bout de une **demi-journée**. On peut donc considérer que cette valeur est $C_{0,5}$, donc pour $n = 0,5$. Autrement dit, nous avons calculé :

$$C_{0,5} = 1000 \times 0,2^{0,5}$$

Vous pouvez vérifier que la calculatrice fait ce calcul sans problème et renvoie le résultat prévu.

Ici, nous ne voulons pas savoir **comment** fait la calculatrice pour calculer $0,2^{0,5}$. Nous essayons juste de comprendre pourquoi cela pourrait avoir un intérêt de calculer une puissance avec une virgule.

III. Affiner encore

Complétez le tableau ci-dessous en utilisant les résultats précédents.

n	0	0,5	1
C_n en $\mu g \cdot L^{-1}$	1000		

- a) Vérifiez que C_0 , $C_{0,5}$ et C_1 sont en progression géométrique.

On notera p la raison de cette suite.

- b) La raison q de la première partie correspond au passage d'une journée. Chaque jour, la concentration est $\times q$.

La raison p de la question précédente correspond au passage d'une demi-journée. Chaque demi-journée, la concentration est $\times p$.

Déduisez-en le lien entre p et q .

- c) Pour aller plus loin : par combien est multipliée la concentration toutes les heures ?

À quelle baisse relative cela correspond-il ?

- d) Vous pouvez maintenant ajouter le graphique l'évolution de C pour toutes les heures.