

Exponentielle de base a – Propriétés

On a vu pourquoi il pouvait être utile de calculer quelque chose comme $0,2^{0,5}$. De façon générale, on voudrait calculer une puissance a^x avec un x réel (pas forcément entier).

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$.

On souhaite donner à f des propriétés qui rendent la fonction conforme à l'intuition que l'on a sur les puissances et pratique à utiliser.

On souhaite donc que la fonction f respecte les conditions suivantes :

- i. f est continue. Intuitivement, cela veut dire que le tracé de la courbe n'a pas de trou.
- ii. $f(1) = a$, c'est à dire $a^1 = a$.
- iii. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, c'est à dire $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, selon la règle de calcul habituelle des puissances.

Vous devriez voir déjà qu'avec ces règles, $f(n) = a^n$ (c'est à dire pour x entier) on retrouve le calcul habituel des puissances. Donc nous définissons une façon de calculer des puissances qui est compatible avec le calcul de puissance ordinaire mais qui en plus permet de mettre un nombre réel en exposant.

I. Certaines valeurs de a ne conviennent pas

- 1) Supposons que pour un certain réel s on ait $f(s) = 0$, donc $a^s = 0$.

On peut toujours dire que $(1+s) - s = 1$.

Utilisez la 3e règle pour montrer que dans ce cas, $a = 0$.

- 2) Supposons maintenant que $a < 0$.

- a) Que vaut $f(1)$? Quel est son signe ?
- b) Que vaut $f(2)$? Quel est son signe ?
- c) Comme f est continue, justifiez qu'il doit exister une solution s à $f(s) = 0$ avec $1 < s < 2$.

On aboutit à une contradiction.

Le cas $a = 0$ n'a aucun intérêt et le cas $a < 0$ aboutit à une contradiction. On prendra donc toujours $a > 0$. Vous pouvez donc considérer que $a > 0$ dans la suite. Le raisonnement que l'on vient de faire permet également de comprendre que l'on a forcément $a^x > 0$.

II. D'autres règles de calcul

- 1) En tenant compte du fait que $x = x + 0$ et en utilisant la 2e règle de, déterminez ce que doit valoir a^0 .
- 2) En tenant compte du fait que $x + (-x) = 0$, déterminez une formule pour a^{-x} .
- 3) Donnez une formule pour a^{x-y} .

III. Puissance et racines

Avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$a^{nx} = a^{\overbrace{x+x+\dots+x}^{n \times}} = a^{\overbrace{a^x \times a^x \times \dots \times a^x}^{n \times}} = (a^x)^n$$

- 1) Si je pose $y = a^{0,5}$,
 - a) à quoi doit être égal y^2 ?
 - b) puisque $y > 0$ et $a > 0$, donnez une autre formule pour y .
Ce résultat permet de comprendre pourquoi il était important que $a > 0$.
- 2) Maintenant je désire calculer, par exemple, $y = 2^{1,3}$.
 - a) Justifiez que $y^{10} = 8\,192$.
 - b) Le nombre y est donc l'unique solution positive de cette équation. Déterminez cette solution par une méthode graphique (utilisez le tracer de courbe de la calculatrice)
 - c) Bien sûr, la calculatrice sait calculer directement $2^{1,3}$. Faites-le pour vérifier que vous obtenez bien le même résultat.

On constate donc que les exposants réels ont un rapport avec les racines. Il est utile de vous souvenir que $\sqrt{a} = a^{0,5}$.