

Exponentielle de base a



On a vu en TD pourquoi il pouvait être intéressant de calculer des puissances avec un exposant réel : $f(x) = a^x$.

On a vu les propriétés que **devrait** posséder une telle fonction. On a par exemple éliminé le cas $a < 0$ qui posait problème.

On ne pourra aller plus loin pour l'instant. Par exemple, nous n'avons pas encore le nécessaire pour dériver a^x . Il nous manque encore un élément que nous verrons plus tard dans l'année.

I) Définition

La fonction **exponentielle de base a**, pour un réel $a > 0$, est la fonction définie :

$$f(x) = a^x$$

Ensemble de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Autrement dit, c'est une généralisation de la puissance pour un exposant réel.

II) Propriétés

Cette fonction est **continue**

II) Propriétés

Cette fonction est **continue**

Les règles des puissances ordinaires s'appliquent

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $a^{n \cdot x} = (a^x)^n$

II) Propriétés

Cette fonction est **continue**

Les règles des puissances ordinaires s'appliquent

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $a^{n \cdot x} = (a^x)^n$

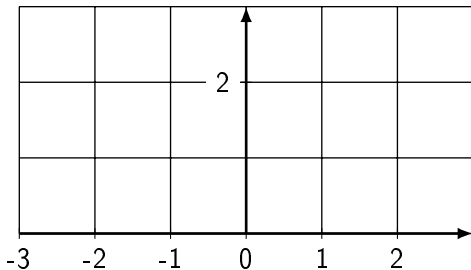
L'exponentielle est **toujours strictement positive** : $a^x > 0$

Propriétés algébriques : page 63

III) Courbe et variations

Cas $a > 1$ ex. $a = 1,5$

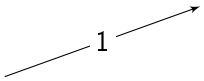
Cas $a < 1$ ex. $a = 0,7$

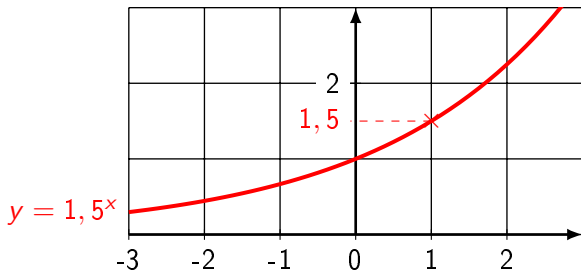


III) Courbe et variations

Cas $a > 1$ ex. $a = 1,5$

Cas $a < 1$ ex. $a = 0,7$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x			



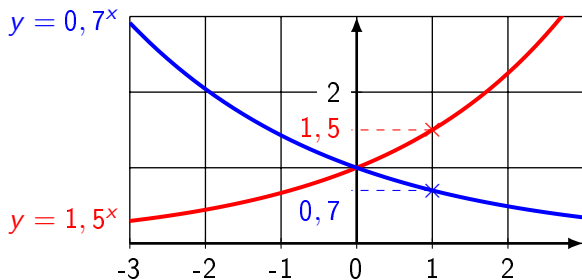
III) Courbe et variations

Cas $a > 1$ ex. $a = 1,5$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x			

Cas $a < 1$ ex. $a = 0,7$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x			



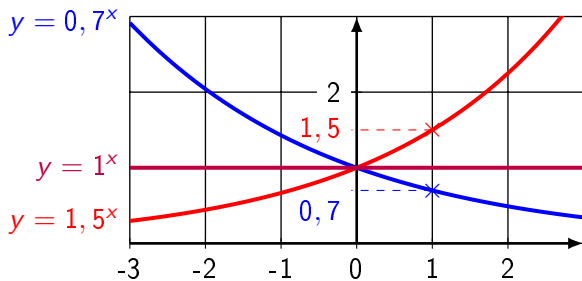
III) Courbe et variations

Cas $a > 1$ ex. $a = 1,5$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x			

Cas $a < 1$ ex. $a = 0,7$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
a^x			



Variations : page 63, colonne droite et page 64

87 page 65

92 page 66

IV) Taux d'évolution moyen

Le problème : Une quantité Q évolue d'un pourcentage t au cours d'une durée T . On veut calculer le pourcentage d'évolution pour une fraction $\frac{1}{n}$ de la durée T .

IV) Taux d'évolution moyen

Le problème : Une quantité Q évolue d'un pourcentage t au cours d'une durée T . On veut calculer le pourcentage d'évolution pour une fraction $\frac{1}{n}$ de la durée T .

Exemple : la production de déchets d'une ville augment de 3 % par an. De combien augmente-elle en moyenne par mois ?

Par « moyenne » on veut dire que l'on suppose que l'augmentation est la même tous les mois et aboutit à la même augmentation annuelle.

On cherche t_m , taux mensuel, connaissant $t_a = 3\%$, taux annuel.

Solution :

- Chaque mois, la quantité est multipliée par
- Chaque année, la quantité est multipliée par
- Mais comme une année, c'est 12 mois, on peut aussi dire que chaque année, la quantité est multipliée par

On cherche t_m , taux mensuel, connaissant $t_a = 3\%$, taux annuel.

Solution :

- Chaque mois, la quantité est multipliée par $1 + t_m$
- Chaque année, la quantité est multipliée par
- Mais comme une année, c'est 12 mois, on peut aussi dire que chaque année, la quantité est multipliée par

On cherche t_m , taux mensuel, connaissant $t_a = 3\%$, taux annuel.

Solution :

- Chaque mois, la quantité est multipliée par $1 + t_m$
- Chaque année, la quantité est multipliée par $1 + t_a$
- Mais comme une année, c'est 12 mois, on peut aussi dire que chaque année, la quantité est multipliée par

On cherche t_m , taux mensuel, connaissant $t_a = 3\%$, taux annuel.

Solution :

- Chaque mois, la quantité est multipliée par $1 + t_m$
- Chaque année, la quantité est multipliée par $1 + t_a$
- Mais comme une année, c'est 12 mois, on peut aussi dire que chaque année, la quantité est multipliée par $(1 + t_m)^{12}$

On cherche t_m , taux mensuel, connaissant $t_a = 3\%$, taux annuel.

Solution :

- Chaque mois, la quantité est multipliée par $1 + t_m$
- Chaque année, la quantité est multipliée par $1 + t_a$
- Mais comme une année, c'est 12 mois, on peut aussi dire que chaque année, la quantité est multipliée par $(1 + t_m)^{12}$

$$(1 + t_m)^{12} = 1 + t_a \Rightarrow 1 + t_m =$$

On cherche t_m , taux mensuel, connaissant $t_a = 3\%$, taux annuel.

Solution :

- Chaque mois, la quantité est multipliée par $1 + t_m$
- Chaque année, la quantité est multipliée par $1 + t_a$
- Mais comme une année, c'est 12 mois, on peut aussi dire que chaque année, la quantité est multipliée par $(1 + t_m)^{12}$

$$(1 + t_m)^{12} = 1 + t_a \Rightarrow 1 + t_m = (1 + t_a)^{1/12}$$

On cherche t_m , taux mensuel, connaissant $t_a = 3\%$, taux annuel.

Solution :

- Chaque mois, la quantité est multipliée par $1 + t_m$
- Chaque année, la quantité est multipliée par $1 + t_a$
- Mais comme une année, c'est 12 mois, on peut aussi dire que chaque année, la quantité est multipliée par $(1 + t_m)^{12}$

$$(1 + t_m)^{12} = 1 + t_a \Rightarrow 1 + t_m = (1 + t_a)^{1/12}$$

On peut conclure :

$$\begin{aligned} t_m &= (1 + t_a)^{1/12} - 1 \\ &= (1 + 3/100)^{1/12} - 1 \\ &\approx 0,0025 = 0,25\% \end{aligned}$$

On peut remarquer que le résultat n'est pas très loin de $\frac{3\%}{12}$. C'est en effet une bonne approximation dans les cas où les taux sont proches de 0%.

Taux moyen : page 64

98 page 66

103 et 105 page 67