

VA discrète

VA = Variable Aléatoire

I) Présentation

1) Qu'est-ce ?

Exemple : Je lance un dé, je note le résultat.

C'est une expérience aléatoire qui produit un nombre.

- ce nombre peut changer au cours des répétitions → c'est une **variable**
- ce nombre est aléatoire → c'est une **variable aléatoire**
- Ce nombre ne peut prendre que des valeurs isolées : 1 ; 2 ; 3 ; ... ; 6.
Mais pas 1,5 ou $\sqrt{3}$ → c'est une **variable aléatoire discrète**

2) VA et prédiction

- Une VA est une notion **probabiliste**.
- On parle de probabilités pour faire des **prédictions**.
- Quand on parle d'une VA, **on ne connaît pas sa valeur !**
- On fait des prédictions sur la valeur qu'elle prendra quand on fera l'expérience (ou quand on prendra connaissance du résultat)
- Cela n'a de sens que si l'expérience est susceptible de se répéter (probas n'ont pas tellement de sens sur une réalisation unique)

3) Exemples

Le nombre envisagé est-il une VAD et sinon pourquoi.

- a) mesure du diamètre d'un chou pris au hasard dans un jardin
- b) nombre d'enfants dans une famille prise au hasard
- c) nombre d'enfants dans **ma** famille
- d) victoire à la loterie
- e) longévité d'un(e) Français(e)
- f) longévité en années d'un(e) Français(e)
- g) longévité en années d'un(e) Français(e) qui fume un paquet de cigarette par jour et...

4) Notation

On note une VAD par une majuscule. Par ex. X ou T ...

Exemple : si je parle du nombre d'enfants dans une famille prise au hasard,

- Je note N la VAD.
 - On ne connaît pas sa valeur,
 - on sait qu'elle pourrait être égale à 0, 1, 2, ...
 - je fais des prédictions comme
« probabilité que la famille ait 3 enfants au plus »
c'est à dire : $p(N \leq 3)$
- Je note n si je parle d'un résultat connu, après tirage (choix aléatoire de la famille)
- Si par ex. je dis $p(N \leq 3) = 35\%$ cela veut dire que...

Si on prélève beaucoup de famille, 35 % d'entre elles compteront au plus 3 enfants.

5) Loi de probabilité

La loi de probabilité c'est l'ensemble des probabilités $p(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i possibles.

5) Loi de probabilité

La loi de probabilité c'est l'ensemble des probabilités $p(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i possibles.

Exemple, avec un dé, je dis :

- je gagne 50 euros si je fais 6
- je gagne 20 euros si je fais 5
- je perds 20 euros si je fais 1 à 4

X est le gain et les x_i sont -20 , 20 et 50

5) Loi de probabilité

La loi de probabilité c'est l'ensemble des probabilités $p(X = x_i)$ pour toutes les valeurs x_i possibles.

Exemple, avec un dé, je dis :

- je gagne 50 euros si je fais 6
- je gagne 20 euros si je fais 5
- je perds 20 euros si je fais 1 à 4

X est le gain et les x_i sont -20 , 20 et 50

x_i	-20	20	50
$p(X = x_i)$	$4/6$	$1/6$	$1/6$

II) Espérance

1) Définition

Soit X une VA. On note $E(X)$ l'**espérance** de X .

L'espérance est la moyenne estimée : Si on répète l'expérience un grand nombre de fois, le résultat, **en moyenne** devrait être $E(X)$.

Pour cette raison on note aussi $\overline{X}$.

⚠ $\overline{X}$ = moyenne **prévue** avant ; $\bar{x}$ = moyenne **constatée** après.

Exemple

X est le résultat d'un dé ordinaire.

Que vaut $E(X)$ – *on peut le deviner mais le raisonnement est important*

Exemple

X est le résultat d'un dé ordinaire.

Que vaut $E(X)$ – *on peut le deviner mais le raisonnement est important*

Si on répétait un grand nombre de fois...

résultat	1	2	3	4	5	6
fréquence	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On prévoit donc une moyenne...

Exemple

X est le résultat d'un dé ordinaire.

Que vaut $E(X)$ – *on peut le deviner mais le raisonnement est important*

Si on répétait un grand nombre de fois...

résultat	1	2	3	4	5	6
fréquence	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On prévoit donc une moyenne...

$$\bar{X} = \frac{1}{6} \times 1 + \dots + \frac{1}{6} \times 6$$

Exemple

X est le résultat d'un dé ordinaire.

Que vaut $E(X)$ – *on peut le deviner mais le raisonnement est important*

Si on répétait un grand nombre de fois...

résultat	1	2	3	4	5	6
fréquence	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On prévoit donc une moyenne...

$$\bar{X} = \frac{1}{6} \times 1 + \dots + \frac{1}{6} \times 6$$

$$E(X) = \bar{X} = 3,5$$

⚠ C'est une moyenne ! il est donc normal d'obtenir un résultat à virgule, comme quand on dit « le nombre moyen d'enfants par femme est 1,8 »

2) Formule

$$E(X) = \sum_i p(X = x_i) \cdot x_i$$

Les x_i sont les résultats possibles pour X .

- 2 – 4 page 149
- 22 – 23 page 150
- 24 page 150 : Vrai/Faux
- 25 page 150 : dé truqué
- 49 page 153 : Écart entre deux dés
- 50 page 153 : Avec des tableaux statistiques
- 75 page 157 : Jeu "Crown and Anchor" (en anglais)

On peut ajouter un jeu de stop ou encore.

3) Linéarité

Comme toute moyenne, l'espérance est **linéaire**.

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

écrit aussi

$$\overline{a \cdot X + b \cdot Y} = a \cdot \overline{X} + b \cdot \overline{Y}$$

Exemple : On considère le résultat de deux dés, X et Y . L'espérance de la somme des deux dés est :

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 3,5 + 3,5 = 7$$